Über gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene.

Von **Karl Bobek**,
Privatdocenten in Prag.

I.

Obgleich es möglich ist jede eindeutige involutorische Transformation der Ebene durch successive Anwendung von quadratischen Transformationen auf einen von vier bestimmten Grundtypen zu reduciren,[1] glaube ich doch im Folgenden einige Untersuchungen über eine ausgezeichnete Reihe dieser Transformationen der hohen Akademie vorlegen zu dürfen, die sich durch die Einfachheit ihrer Definition auszeichnen und ein bemerkenswerthes Beispiel solcher Transformationen liefern. Unter ihnen treten die bekannten Transformationen 8ter[2] und 17ter[3] Ordnung als Glieder dieser Reihe auf. Die Transformationen zeigen die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass eine ungerade Anzahl derselben hintereinander angewandt wieder zu einer Transformation der Reihe führt, hingegen liefert eine gerade Anzahl solcher Transformationen eine eindeutige, aber nicht mehr involutorische Transformation der Ebene.

Ein weiteres Interesse bieten diese Transformationen dadurch, dass in engster Beziehung mit ihnen hyperelliptische Curven auftreten, und auf diese Art gewisse Typen solcher Curven erhalten werden können,[4] von denen sich aber zeigen lässt, dass

---

[1] Cf. Bertini: Ricerche sulle transformazioni univoche involutorie nel piano. Annali di matematica, Serie II, Tomo VIII, pag. 244.

[2] Geiser: Über zwei geometrische Probleme. Crelle, Bd. 67, pag. 78.

[3] Bertini, l. c. pag. 245.

[4] Vgl. Küpper: Über hyperelliptische Curven $3n^{\text{ter}}$ Ordnung. Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1884.

sie, vom Geschlecht p, von $p+1$ willkürlichen Constanten abhängen, und dass sie daher specielle Curven dieser Art sind (Vgl. pag. 513.)

I. Eindeutige involutorische Transformationen der $(3\nu+5)^{\text{ten}}$ Ordnung.

1. Es seien die Punkte $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ Basispunkte eines Büschels von Curven 3ter Ordnung. Man bestimme eine nicht zerfallende Curve Γ^ν der ν^{ten} Ordnung so, dass sie den Punkt i zum γ_i-fachen Punkt besitzt, wobei

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \gamma_3 \geqq \gamma_4 \geqq \gamma_5 \geqq \gamma_6 \geqq \gamma_7 \geqq \gamma_8 \geqq \gamma_9 \geqq 0$$

sei. Die Zahlen γ_i wählen wir nun so, dass

$$\sum_1^9 {}_i\, \gamma_i = 3\nu - 1 \tag{1}$$

ist. Da dann jede Curve des Büschels 3ter Ordnung durch 1—9 die Γ^ν nur in einem Punkte schneidet, so ist Γ^ν rational oder es gilt gleichzeitig mit (1) auch

$$\sum_1^9 {}_i\, \gamma_i(\gamma_i - 1) = (\nu-1)(\nu-2),$$

woraus sich mit Hilfe von (1)

$$\sum_1^9 {}_i\, \gamma_i^2 = \nu^2 + 1 \tag{2}$$

ergibt. Aus (1) und (2) folgt nun

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_i(\gamma_i+1) = \tfrac{1}{2}\nu(\nu+3),$$

d. h. die Curve Γ^ν ist durch die Annahme der vielfachen Punkte 1—9 vollständig bestimmt.

Wir werden bald eine Methode angeben, mittels deren man aus den Zahlen ν und γ_i für eine Curve Γ^ν die Zahlen γ_i für eine Curve höherer als ν^{ten} Ordnung angeben kann. Hier mögen einige der Zahlen angegeben werden.

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	$\sum_1^9 i\gamma_i$	$\sum_1^9 i\gamma_i^2$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2
2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	5	5
3	2	1	1	1	1	1	1	0	0	8	10
4	2	2	2	1	1	1	1	1	0	11	17
	3	1	1	1	1	1	1	1	1		
5	2	2	2	2	2	2	1	1	0	14	26
	3	2	2	2	1	1	1	1	1		
6	3	2	2	2	2	2	2	2	0	17	37
	3	3	2	2	2	2	1	1	1		
7	3	3	3	3	2	2	2	1	1	20	50
	4	3	2	2	2	2	2	2	1		
8	3	3	3	3	3	3	3	1	1	23	65
	4	3	3	3	3	2	2	2	1		
	4	4	3	2	2	2	2	2	2		
9	4	4	3	3	3	3	3	2	1	26	82
	4	4	4	3	3	2	2	2	2		
	5	3	3	3	3	3	2	2	2		
10	4	4	4	4	3	3	3	3	1	29	101
	4	4	4	4	4	3	2	2	2		
	5	4	4	3	3	3	3	2	2		
11	6	4	4	3	3	3	3	3	3	32	122

Der variable Punkt in dem eine Curve C^3 des Büschels durch 1—9 die Γ^ν trifft, sei mit γ bezeichnet.

Wir setzen nun folgende Beziehung zwischen den Punkten der Ebene fest:

Einem Punkte a möge der Punkt α entsprechen, in welchem C^3_a (die Curve 3ter Ordnung des Büschels durch 1—9, welche durch den Punkt a geht) die Gerade $\overline{\gamma a}$ noch schneidet.

Die hiedurch definirte Verwandtschaft zwischen den Punkten a, α der Ebene ist offenbar eindeutig und involutorisch. Die Punkte 1—9 sind ihre Fundamentalpunkte.

2. Dem Punkte i möge die Fundamentalcurve Δ^{ν_i} entsprechen Ihre Ordnung ν_i ergibt die folgende Betrachtung. Ist a ein Punkt einer beliebigen Geraden g und schneidet $\overline{ai}$ die Γ^ν in demselben Punkte, wie C^3_a, so ist a ein Schnittpunkt von g mit $\Delta^{\nu_i}_i$. Es trifft nun $\overline{ai}$ die Curve Γ^ν in $\nu-\gamma_i$ Punkten, durch die ebensoviele Curven 3ter Ordnung gehen, die g in $3(\nu-\gamma_i)$ Punkten a' treffen sollen. Umgekehrt entspricht einem Punkte a' ein Punkt a. Es treten mithin auf g im Ganzen $3(\nu-\gamma_i)+1$ Coincidenzen auf, von denen ν auf Γ^ν liegen und die $2\nu-3\gamma_i+1$ übrigen offenbar Punkte von $\Delta^{\nu_i}_i$ sind.

Die Ordnung der Fundamentalcurve $\Delta^{\nu_i}_i$ ist daher $\nu_i=2\nu-3\gamma_i+1$.

Legt man g durch den Punkt i, so ergibt die obige Correspondenz, dass der Punkt i für $\Delta^{\nu_i}_i$ ein $(\nu-2\gamma_i+1)$-facher ist, was übrigens auch daraus folgt, dass auf g nur die $\nu-\gamma_i$ Punkte von $\Delta^{\nu_i}_i$ liegen können, in denen die Curven 3ter Ordnung, die durch die $\nu-\gamma_i$ Schnittpunkte von g mit Γ^ν gehen, die Gerade g schneiden.

Legt man g durch den Fundamentalpunkt $\varkappa$, so ergibt die Correspondenz, da einem Punkte a, ausser noch $2(\nu-\gamma_i)$ Punkte a' entsprechen, $2(\nu-\gamma_i)+1$ Coincidenzen, unter denen $(\nu-\gamma_\varkappa)$ Schnittpunkte von Γ^ν mit g auftreten, so dass auf g nunmehr bloss $2(\nu-\gamma_i)+1-(\nu-\gamma_\varkappa)=\nu-2\gamma_i+\gamma_\varkappa+1$ Punkte von $\Delta^{\nu_i}_i$ liegen, oder der Punkt $\varkappa$ ist für $\Delta^{\nu_i}_i$ ein $(\nu-\gamma_i-\gamma_\varkappa)$-facher.

Bezeichnet man also die Ordnung der Vielfachheit des Punktes $\varkappa$ von $\Delta^{\nu_i}_i$ mit $\gamma_{i\varkappa}$, so ist

$$\gamma_{i\varkappa}=\nu-\gamma_i-\gamma_\varkappa \text{ für } i\neq\varkappa$$

und (3)

$$\gamma_{ii}=\nu-2\gamma_i+1$$

Hieraus folgt, dass die $\Delta^{\nu_i}_i$, wie es sein muss, rational sind, und sich ausserhalb der Fundamentalpunkte nicht mehr schneiden.

3. Entspricht dem Punkte i eine Fundamentalcurve, so dass also $2\nu-3\gamma_i+1>0$ ist, so müssen offenbar die Zahlen $\gamma_{i\varkappa}$ und γ_{ii} entweder positiv oder es können einzelne auch null sein, d. h. es ist

$$\nu+1-2\gamma_i\geqq 0$$

oder

$$\gamma_i\leqq\frac{\nu+1}{2}.$$

Da nun γ_1 der höchstvielfache Punkt ist, so wird, im Falle diesem eine Fundamentalcurve entspricht,

$$\gamma_1 \leqq \frac{\nu+1}{2}$$

sein.

Soll aber dem Punkte 1 keine Fundamentalcurve entsprechen, so muss entweder die Gerade $\overline{1\gamma}$, wenn γ der Schnittpunkt der beweglichen C^3 mit Γ^ν ist, fest sein, oder die entsprechende C^3 in 1 berühren. Der erste Fall kann offenbar nur eintreten, wenn Γ^ν die Gerade $\overline{1\gamma}$ selbst ist, also $\nu = 1$; $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$. Der zweite zweite Fall, da $\overline{1\gamma}$ die C^3 im Punkte 1 berührt, liefert eine Curve 4ter Ordnung, welche in 1 einen 3-fachen Punkt hat, und welche durch den Curvenbüschel C^3 und den ihm projectivischen Tangentenbüschel erzeugt wird. Es ist der zweite unter $\nu = 4$ in der Tafel angegebene Fall der Γ^ν.

In jedem anderen Falle wird also dem Punkte 1, und folglich auch jedem Punkte i eine Fundamentalcurve entsprechen und es ist

$$\gamma_1 \leqq \frac{\nu+1}{2}. \tag{4}$$

Da $\gamma_i \leqq \gamma_1$ ist, so entsprechen auch allen Punkten i Fundamentalcurven, die durch diesen Punkt i gehen.

Für eine Fundamentalcurve $\Delta_i^{\gamma_i}$ ist

$$\sum_1^9{}_\varkappa \gamma_{i\varkappa} = \nu + 1 - 2\gamma_i + \sum_1^9{}'_\varkappa (\nu - \gamma_i - \gamma_\varkappa),$$

hiebei bedeutet Σ', dass $\varkappa$ alle Werthe von 1—9 annehmen soll, ausser den Werth i. Also ist zu Folge (1)

$$\sum_1^9{}_\varkappa \gamma_{i\varkappa} = 6\nu - 9\gamma_i + 2 = 3\nu_i - 1$$

d. h. die Curve $\Delta_i^{\gamma_i}$ kann als eine Curve Γ genommen werden, um eine neue Verwandtschaft zu definiren.

Da $\Sigma\gamma_i = 3\nu - 1$, so muss wenigstens ein $\gamma_i < \frac{3\nu-1}{9}$ denn wären alle $\gamma_i > \frac{3\nu-1}{9}$, so wäre auch $\Sigma\gamma_i > 3\nu - 1$. Ist also

$\gamma_i < \frac{3\nu-1}{9}$, so wird

$$3\gamma_i < \nu - \tfrac{1}{3}$$
$$2\nu - 3\gamma_i + 1 \geqq \nu + 1,$$

d. h. $\nu_i \geqq \nu+1$. Es ist also die diesem Fundamentalpunkte entsprechende Fundamentalcurve von höherer Ordnung als die Γ^ν. So viele verschiedene Werthe also $\gamma_i < \frac{3\nu-1}{9}$ sind, so viele neue Curven Γ kann man angeben, die eine höhere Ordnung haben als die angenommene. Es kommen auch $\gamma_\varkappa > \frac{3\nu-1}{9}$ vor; durch diese erhält man offenbar Curven Γ niedrigerer Ordnung. (Vgl. pag. 492.)

4. Ist n die Ordnung der Verwandtschaft, so wird die Curve n^{ter} Ordnung G^n, welche der Geraden g entspricht im Fundamentalpunkte i einen ν_i-fachen Punkt haben. Zwei Curven G^n und G'^n, welche den Geraden g, g' entsprechen, können sich ausserhalb der Fundamentalpunkte 1—9 nur in einem Punkte schneiden, dem entsprechenden zum Schnittpunkte von $g.g'$. Also ist

$$n^2 = 1 + \sum_1^9{}_i \nu_i^2 = (3\nu+5)^2$$

und die Ordnung der Verwandtschaft ist also $3\nu+5$. Einer Curve m^{ter} Ordnung, die in i einen δ_i-fachen Punkt hat, entspricht mithin eine Curve der Ordnung

$$M = (3\nu+5)m - \sum_1^9{}_i \delta_i \nu^i \quad (\nu^i = 2\nu - 3\gamma_i + 1) \qquad (5)$$

5. Die Curven $\Delta_i^{\nu_i}$ schneiden sich ausserhalb der Fundamentalpunkte nicht mehr. Es ist auch

$$(\nu-2\gamma_i+1)(\nu-\gamma_i-\gamma_\varkappa)+(\nu-2\gamma_\varkappa+1)(\nu-\gamma_\varkappa-\gamma_i)+$$
$$+\sum{}_h''(\nu-\gamma_i-\gamma_\varkappa)(\nu-\gamma_\varkappa-\gamma_\varkappa) = (2\nu-3\gamma_i+1)(2\nu-3\gamma_\varkappa+1) = \nu_i\nu_\varkappa$$

zu Folge der Gleichungen (1) und (2), wobei in Σ'' h nicht gleich i und $\varkappa$ zu setzen ist.

Die Fundamentalcurven bilden zusammen die Jacobische Curve des Netzes der G^n, indem diese nur Doppelpunkte aufweisen können, sobald sie zerfallen, also g durch einen der Fundamentalpunkte geht. Es ist auch

$$\sum_1^9 {}_i (2\nu - 3\gamma_i + 1) = 3(3\nu + 4) = 3(n-1).$$

6. Auf jeder Geraden g der Ebene liegen ν Paare a, α der Verwandtschaft; denn g trifft Γ^ν in ν Punkten, durch welche ν Curven C^3 gehen, welche jede ein Paar, auf g liegend, ausschneidet.

Lässt man g um einen festen Punkt k der Ebene sich drehen, so ist der Ort der auf ihr liegenden Paare a, α eine Curve der $2\nu+1$ten Ordnung, $k^{2\nu+1}$; denn auf jeder Geraden durch k liegen 2ν Punkte derselben, und k ist einfacher Punkt von $k^{2\nu+1}$, da die C_k^3 die Γ^ν in dem Punkt γ trifft, so dass $\overline{k\gamma}$ den Punkt $\varkappa$ enthält, der dem Punkte k entspricht.

Der Fundamentalpunkt i ist ein $(\nu - \gamma_i)$-facher Punkt von $k^{2\nu+1}$; denn auf $\overline{ki}$ liegen von $k^{2\nu+1}$ die γ_i Paare, welche die C^3 ausschneiden, die Γ^ν in i berühren, und die $\nu - \gamma_i$ Schnittpunkte von $\overline{ki}$ mit $\Delta_i^{\gamma_i}$, während die $\nu - \gamma_i$ entsprechenden Punkte dieser Schnittpunkte in i fallen. In der That ist auch

$$2\nu + 1 - 2\gamma_i - (\nu - \gamma_i) - 1 = \nu - \gamma_i$$

die Vielfachheit des Punktes i für $k^{2\nu+1}$.

Die Curven $k^{2\nu+1}$ entsprechen sich offenbar in der Verwandtschaft selbst. Ihr Geschlecht ist

$$\nu(2\nu - 1) - \tfrac{1}{2} \sum_1^9 {}_i (\nu - \gamma_i)(\nu - \gamma_i - 1) = \nu.$$

Die Curven $k^{2\nu+1}$ bilden ein Netz. Durch jeden Punkt a der Ebene geht ein Büschel derselben. Denn trifft C_a^3 der Γ^ν in γ, so werden alle $k^{2\nu+1}$, welche ihre Punkte k auf $\overline{a\gamma}$ haben, durch a und α, überdiess aber noch durch die $\nu - 1$ andere Paare dieser Geraden gehen.

Die vielfachen Punkte der $k^{2\nu+1}$ und die ν Paare auf der festen Geraden geben nun zusammen

$$\sum_{1}^{9} i\,(\nu-\gamma_i)^2+2\nu=(2\nu+1)^2,$$

d. h. alle Schnittpunkte zweier Curven $k^{2\nu+1}$, sie bilden die Basis des erwähnten Büschels.

Sind zwei Punkte a, b gegeben, durch die $k^{2\nu+1}$ gehen soll, so schneide C_a^3 die Γ^ν in γ_1 und C_b^3 in γ_2, dann liefert der Schnittpunkt von $\overline{a\gamma_1}$ und $\overline{b\gamma_2}$ den Punkt k, welchem $k^{2\nu+1}$ entspricht.

Die Curven $k^{2\nu+1}$ bilden eine Art von Nullsystem in der Ebene, indem jedem Punkte eine durch ihn hindurchgehende Curve und einer Curve ein auf ihr liegender Punkt entspricht.

Eine Curve $k^{2\nu+1}$ wird von einer C^3 nur in einem Punktepaar geschnitten. Hieraus folgt, dass $k^{2\nu+1}$ ohne zu zerfallen nur in einem Coïncidenzpunkte der Verwandtschaft einen Doppelpunkt besitzen kann. Denn hätte $k^{2\nu+1}$ in a einen Doppelpunkt, so müsste sie auch in α einen Doppelpunkt haben. Fällt nun a nicht mit α zusammen, so hätte die C_a^3, da sie auch durch α geht, mit $k^{2\nu+1}$ vier Punkte gemeinschaftlich und müsste daher einen Theil von $k^{2\nu+1}$ bilden. Da nun letzteres in der That eintreten kann, wie wir gleich sehen werden, so zerfällt die Jacobische Curve des Netzes der $k^{2\nu+1}$ in die Coïncidenzcurve der Verwandtschaft, auf der die $k^{2\nu+1}$ einen Doppelpunkt haben können und in eine zweite Curve, auf der die Punkte paarweise so auftreten, dass sie Schnittpunkte einer C^3 und einer $C^{2\nu-2}$ sind, die zusammen eine $k^{2\nu+1}$ constituiren.

7. Die Coïncidenzcurve der Verwandtschaft ist von der $\nu+5^{\text{ten}}$ Ordnung und hat in dem Fundamentalpunkte i einen $\nu-2\gamma_i+1$ Punkt. Denn die Gerade g trifft die ihr entsprechende Curve $G^{3\nu+5}$ in $3\nu+5$ Punkten, von denen 2ν die ν auf g liegenden Paare sind. Die übrigen $\nu+5$ Punkte sind solche, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Da ferner die Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu_i}$ durch i $(\nu-2\gamma_i+1)$-fach geht, so fallen in den $(\nu-2\gamma_i+1)$ Richtungen ihrer Äste entsprechende Punkte mit i zusammen. Hieraus ersieht man auch, dass $\Delta_i^{\nu_i}$ von der Coïncidenzcurve $H^{\nu+5}$ in den $\nu-2\gamma_i+1$ Ästen in i berührt wird.

$\Delta_i^{\gamma_i}$ kann die $H^{\nu+5}$ ausserhalb der Fundamentalpunkte nicht schneiden und es ist auch

$$(\nu-2\gamma_i+1)(\nu-2\gamma_i+2)+\sum_i{}'(\nu-\gamma_i-\gamma_\varkappa)(\nu-2\gamma_\varkappa+1)=$$
$$=(\nu+5)(2\nu-3\gamma_i+1).$$

Das Geschlecht der $H^{\nu+5}$ ist

$$\tfrac{1}{2}(\nu+4)(\nu+3)-\tfrac{1}{2}\Sigma(\nu-2\gamma_i+1)(\nu-2\gamma_i)=3.$$

8. Die Punkte von $H^{\nu+5}$ können auch auf jeder C^3 erhalten werden, indem man von γ an die C^3 die vier Tangenten zieht. Die Berührungspunkte derselben liegen offenbar auf $H^{\nu+5}$. Es schneidet auch die $H^{\nu+5}$ eine C^3 nur in

$$3(\nu+5)-\sum_1^9{}_i(\nu-2\gamma_i+1)=4$$

beweglichen Punkten, deren Tangentialpunkt auf Γ liegt.

$H^{\nu+5}$ geht durch die 12 Doppelpunkte der Curven 3ter Ordnung des Büschels.

Die Tangenten der Curven 3ter Ordnung in ihren Schnittpunkten mit der $H^{\nu+5}$ hüllen eine Curve E der $(2\nu+2)$ten Classe ein. Denn die dem Punkte k entsprechende $k^{2\nu+1}$ schneidet die $H^{\nu+5}$ in

$$(2\nu+1)(\nu+5)-\sum_1^9{}_i(\nu-2\gamma_i+1)(\nu-\gamma_i)=2\nu+2$$

Punkten, die mit k verbunden die Richtungen angeben, in denen die entsprechenden Punkte a, α zusammenfallen. Diese Geraden sind Tangenten von $k^{2\nu+1}$.

9. Der andere Theil der Jacobischen Curve des Netzes der $k^{2\nu+1}$ ist eine Curve der $3.2\nu-(\nu+5)=5(\nu-1)$ten Ordnung $K^{5(\nu-1)}$.

Sei d, δ ein Punktepaar, für welches eine der hindurchgehenden $k^{2\nu+1}$ zerfällt, also aus C_d^3 und einer $C^{2\nu-2}$ besteht. Schneidet C_d^3 die Γ^ν in γ, so ist dieser Punkt offenbar derjenige, welchem die zerfallende Curve zugehört; denn die C_d^3 enthält

unendlich viele Paare, die auf den Strahlen durch γ liegen, auf jedem Strahl ein Paar. Die übrigen $\nu—1$ Paare liegen auf $C^{2(\nu-1)}$, welche nicht mehr durch γ geht. Nun geht $C^{2(\nu-1)}$ auf der Geraden $\overline{\gamma d}$ durch das Paar d, δ, durch welches auch C^3_d geht, und kann daher diese Gerade nur mehr in $(\nu—2)$ Paaren treffen, d. h. $\overline{\gamma d}$ schneidet die Curve Γ^ν ausserhalb γ nur noch in $\nu—2$ Punkten und muss daher Tangente von Γ^ν in γ sein. Der Ort der Punkte d, δ ist also der Ort der Schnittpunkte der Tangenten von Γ^ν mit den Curven 3ter Ordnung C^3, welche durch ihren Berührungspunkt gehen. Durch Anwendung des Correspondenzprincips kann nun die Ordnung direct bestimmt werden. Die Classe von Γ^ν ist, da die Curve rational ist $2(\nu—1)$. Ist nun x ein Punkt einer beliebigen Geraden g, so gehen von ihm an Γ^ν $2(\nu—1)$ Tangenten und die durch ihre Berührungspunkte gehenden Curven 3ter Ordnung schneiden g in $6(\nu—1)$ Punkten x'. Umgekehrt entspricht einem Punkte x' ein Punkt x. Es sind also auf g im Ganzen $6(\nu—1)+1$ Coïncidenzen vorhanden, unter denen ν in die Schnittpunkte von Γ^ν mit g fallen, und die übrigen $5(\nu—1)$ auf dem gesuchten Orte liegen.

Dieselbe Betrachtung liefert, dass auf einer Geraden, welche durch den Fundamentalpunkt i geht ausserhalb dieses nur noch $3(\nu—1)+\gamma_i$ Coïncidenzen auftreten, die auf $H^{5(\nu-1)}$ liegen, so dass dieser Punkt für die Curve ein $(2\nu—2—\gamma_i)$-facher wird.

Die Curve $H^{5(\nu-1)}$ entspricht sich in der Verwandtschaft selbst. Ihr Geschlecht ist $3\nu—4$.

10. Die Curve $H^{5(\nu-1)}$ schneidet die dem Punkte k zugehörige $k^{2\nu+1}$ noch in

$$5(\nu-1)(2\nu+1)-\sum_1^9{}_i(2\nu-2-\gamma_i)(\nu-\gamma_i)=4\nu-4$$

Punkten d, δ die paarweise auf $2\nu—2$ Geraden durch k liegen.

Da jede der $2(\nu—1)$ Geraden Tangente von Γ^ν ist, so schneidet dieselbe Γ^ν ausser in dem Berührungspunkte noch in $\nu—2$ Punkten und die $k^{2\nu+1}$, ihren Punkt k auf der Tangete $\overline{d\delta}$ liegen haben und welche nicht zerfallen, müssen daher diese Geraden in d und δ berühren. Durch den Punkt k gehen daher ausser den früher gefundenen $2\nu+2$ Tangenten noch $2(\nu—1)$ Doppeltangenten. Da k ein Punkt von $k^{2\nu+1}$ ist, so

folgt, dass von ihm an $k^{2\nu+1}$ keine Tangente mehr geht, denn diese Curve ist, da ihr Geschlecht ν war, von der $2.2\nu+2\nu=6\nu$ten Classe.

11. Hat die $k^{2\nu+1}$ einen Doppelpunkt auf $H^{\nu+5}$, so gehen von k nur mehr 2ν Tangenten an dieselbe, oder der Punkt k liegt auf der Enveloppe E der Richtungen, in denen die Punkte auf $H^{\nu+5}$ zusammenfallen. Hieraus ergibt sich die Ordnung dieser Enveloppe. Beschreibt nämlich k eine Gerade g, so sahen wir, dass $k^{2\nu+1}$ einen Büschel beschreibt. Nun gibt es in einem Büschel von Curven $m$ter Ordnung, welche in Punkten i je δ_i-fache Punkte haben, noch

$$3(n-1)^2-3\Sigma\,\delta_i^2+\Sigma(2\delta_i+1)$$

Curven, welche noch einen Doppelpunkt besitzen ausserhalb der Basispunkte.[1] In unserem Büschel der $k^{2\nu+1}$ gibt es daher noch

$$3.4\nu^2-3\sum_{1}^{9}{}_i(\nu-\gamma_i)^2+\sum_{1}^{9}{}_i(2\nu-2\gamma_i+1)=6\nu+8$$

Curven, die Doppelpunkte besitzen. Da nun den ν Schnittpunkten von g mit Γ^ν je Curven mit zwei Doppelpunkten entsprechen, so bleiben noch $4(\nu+2)$ Curven übrig, welche einen Doppelpunkt haben, die ihnen entsprechenden Punkte auf g sind Punkte der Enveloppe E, diese ist mithin von der $4(\nu+2)$ten Ordnung. Da ihre Classe $2\nu+2$ war, so ergibt sich ihr Geschlecht

---

[1] Sind nämlich a, b, c drei Punkte der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen, so werden die ersten Polaren von a und b für den Büschel der Curven $m$ter Ordnung projectivische Büschel bilden in Anbetracht der Polaren für dieselbe Grundcurve. Beide erzeugen daher eine Curve der $2(m-1)$ten Ordnung, die in δ_i einen $2(\delta_i-1)$-fachen Punkt hat, dessen Tangenten die $2(\delta_i-1)$ Doppelstrahlen der Involution der δ_i Tangenten der Grundcurven sind. Analog erzeugen die Polarenbüschel für a und c eine Curve $2(m-1)$ter Ordnung, welche dieselben $2(\delta_i-1)$ Tangenten im $2(\delta_i-1)$-fachen Punkte besitzen. Diese beiden Curven schneiden einander in $4(m-1)^2-4\Sigma(\delta_i-1)\delta_i$ Punkten ausserhalb der vielfachen Punkte. Zieht man hievon die Basispunkte des Büschels von Polaren ab, die dem Punkte a zukommen und deren Zahl $(m-1)^2-\Sigma(\delta_i-1)^2$ ist, so bleiben noch $3(m-1)^2+\Sigma(\delta_i-1)^2-4(\Sigma\delta_i(\delta_i-1)$ Punkte in der Ebene übrig, durch welche je eine Polare des Punktes a, b, und c für dieselbe Grundcurve geht, und welche also Doppelpunkte von Curven des Büschels $m$ter Ordnung sind.

gleich $\frac{1}{2}[4\nu+8-2(2\nu+2-1)]=3$, was damit übereinstimmt, dass E durch ihre Tangenten eindeutig auf die Punkte von $H^{\nu+5}$ bezogen ist, also von demselben Geschlechte sein muss.

12. Verbindet man die Punkte a einer Geraden g mit den ihnen entsprechenden Punkten α von G^n, so ist die Enveloppe $\mathfrak{E}$ dieser Geraden von der $(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Classe, denn durch den Punkt k gehen $2\nu+1$ ihrer Tangenten, die Verbindungslinien der $2\nu+1$ Schnittpunkte von $k^{2\nu+1}$ mit g. Die Gerade g enthält ν Paare und ist daher 2ν-fache Tangente. Die Enveloppe $\mathfrak{E}$ ist rational. Berührt eine $k^{2\nu+1}$ die g, so liegt k auf $\mathfrak{E}$. Beschreibt nun k eine Gerade g', so wird der Büschel der $k^{2\nu+1}$ die g in einer Involution $(2\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden, die 2.2ν Doppelelemente aufweist, in denen die $k^{2\nu+1}$ die g berühren. $\mathfrak{E}$ ist also von der $4\nu^{\text{ten}}$ Ordnung. Hieraus ergibt sich wieder ihr Geschlecht $\frac{1}{2}[4\nu-2(2\nu)]=0$.

Ist E eine beliebige Enveloppe der m^{ten} Classe, so liegen auf jeder Tangente derselben ν Paare der Verwandtschaft, deren Ort eine Curve K der $m(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, die in i einen $m(\nu-\gamma_i)$-fachen Punkt hat. Denn soll ein Punkt a von K auf g, einer beliebigen Geraden liegen, so muss $\overline{a\alpha}$ Tangente von E und $\mathfrak{E}$ sein, und umgekehrt ist $\overline{a\alpha}$ Tangente von $\mathfrak{E}$ und E, so ist a ein Punkt von K. Da $\mathfrak{E}$ und E $m(2\nu+1)$ Tangenten gemeinschaftlich haben, so ist dies die Ordnung von K. Ist aber g eine durch i gehende Gerade, so ist $\mathfrak{E}$ nur mehr von der $2\nu+1-(\nu-\gamma_i)=(\nu+\gamma_i+1)^{\text{ten}}$ Classe und hat also mit E nur $m(\nu+\gamma_i+1)$ Tangenten gemeinschaftlich, also schneidet g die K ausserhalb i in $m(\nu+\gamma_i+1)$ Punkten und dieser ist also ein $m(2\nu+1)-m(\nu+\gamma_i+1)=m(\nu-\gamma_i)$-facher Punkt von K. Die Curve K entspricht sich in der Verwandtschaft selbst.

13. Eine allgemeine Curve der $(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in i je einen $(\nu-\gamma_i)$-fachen Punkt hat, ist bestimmt durch

$$(\nu+2)(2\nu+1)-\tfrac{1}{2}\sum_1^i(\nu-\gamma_i)(\nu-\gamma_i+1)=\nu+1$$

Punkte und unsere $k^{2\nu+1}$ bilden daher ein ausgezeichnetes Netz in der Mannigfaltigkeit dieser Curven.

Jede Curve $C^{2\nu+1}$ aber, welche in i einen $(\nu-\gamma_i)$-fachen Punkt hat, entspricht sich in der Verwandt-

schaft selbst. Denn die $C^{2\nu+1}$ schneidet eine feste C^3 die durch die neun Fundamentalpunkte geht nur in zwei Punkten, die ein Paar unserer Verwandtschaft bilden, und die ganze Schaar von zwei Punkten auf C^3 wird von allen $C^{2\nu+1}$ der obigen Art ausgeschnitten.

Da unter ihnen nun auch unsere $k^{2\nu+1}$ vorkommen und diese je in einem Paare a, α die C^3 schneiden, so thuen es alle $C^{2\nu+1}$, welche in i einen $(\nu-\gamma_i)$-fachen Punkt haben, d. h. diese Curven entsprechen sich in der Verwandtschaft selbst.

Aber auch jede Curve $C^{2\nu-3\lambda+1}$ der $(2\nu-3\lambda+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in i einen $(\nu-\gamma_i-\lambda)$-fachen Punkt hat, entspricht sich in der Verwandtschaft selbst. Denn eine C^3 schneidet eine solche Curve noch in

$$3(2\nu-3\lambda+1)-\sum_1^9{}_i(\nu-\lambda-\gamma_i)=2$$

Punkten. Es schneidet daher die Gesammtheit der Curven $C^{2\nu-3\lambda+1}$ auf einer festen C^3 eine einfach lineare Schaar von zwei Punkten aus, deren Verbindungsgeraden durch einen festen Punkt von C^3 gehen. Nimmt man zu $C^{2\nu-3\lambda+1}$ noch λ Curven C^3 hinzu, so bilden diese zusammen eine $C^{2\nu+1}$ der oben erwähnten Art, die sich in der Verwandtschaft selbst entsprechen, und da jede C^3 sich selbst entspricht, so muss es auch die $C^{2\nu-3\lambda+1}$ thun.

Von einer solchen Curve sind nur noch

$$\tfrac{1}{2}(2\nu-3\lambda+1)(2\nu-3\lambda+4)-\tfrac{1}{2}\sum_1^9{}_i(\nu-\gamma_i-\lambda)(\nu-\gamma_i-\lambda+1)=$$
$$=\nu+1-2\lambda$$

Punkte willkürlich wählbar. Ist also

$$2\lambda\leqq\nu+1$$

so werden solche Curven $C^{2\nu-3\lambda+1}$ wirklich existiren, und da

$$\gamma_1\leqq\frac{\nu+1}{2}$$

(nach 3) ist, wenn ν nicht 4 ist, so wird

$$\lambda+\gamma_1\leqq\nu+1 \text{ und } \nu-\lambda-\gamma_1\geqq 1,$$

d. h. die Fundamentalpunkte werden Punkte der $C^{2\nu-3\lambda+1}$ sein.

Ist $\nu = 2\nu' + 1$, so kann man $\lambda = \nu'$ setzen und erhält als Curven niedrigster Ordnung dieser Art, die sich selbst entsprechen, Curven der $(\nu'+3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in i einen $(\nu' - \gamma_i + 1)$-fachen Punkt haben, und die ein Netz bilden; denn von jeder solchen Curve sind noch $\nu + 1 - 2\lambda = 2$ Punkte frei wählbar. Die Curven, welche durch einen Punkt a der Ebene gehen, bilden einen Büschel, und schneiden sich noch in

$$(\nu'+3)^2 - \sum_{1}^{9} {}_i (\nu'+1-\gamma_i)^2 - 1 = 1$$

Punkte, der der entsprechende α zu a sein muss.

Ist also ν ungerade, so können wir unsere Verwandtschaft auch durch das Netz der Curven $\left(\frac{\nu+5}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung definiren, die in jedem der neun Fundamentalpunkte i einen $\left(\frac{\nu+1}{2} - \gamma_i\right)$-fachen Punkt haben, so zwar, dass die Curven, welche durch a gehen, sich noch in dem Punkte α schneiden.

Ist $\nu = 2\nu''$ und ν'' nicht gleich 2, so kann man $\lambda = \nu''$ setzen und erhält als Curven niedrigster Ordnung solche von der $(\nu''+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in i einen $(\nu'' - \gamma_i)$-fachen Punkt haben. Diese Curven bilden einen Büschel, dessen Fundamentalpunkte in den Punkten 1—9 liegen; denn es ist

$$(\nu''+1)^2 - \sum_{1}^{9} {}_i (\nu'' - \gamma_i)^2 = 0$$

und jede Curve ist durch einen weiteren Punkt bestimmt. Eine solche $C^{\nu''+1}$, welche durch a geht, schneidet, die C_a^3 in dem Punkte α.

Setzt man aber $\lambda = \nu'' - 1$, so erhält man Curven der $(\nu''+4)^{\text{ten}}$ Ordnung, die in i einen $(\nu''+1-\gamma_i)$-fachen Punkt haben und von jeder solchen Curve sind drei Punkte willkürlich wählbar. Die Curven $C^{\nu''+4}$ nun, welche durch einen festen Punkt b der Ebene gehen, gehen auch durch den Punkt β und bilden ein Netz sich selbst entsprechender Curven, so dass die

durch einen Punkt a gehenden Curven sich nur mehr in einem Punkte α schneiden, denn es ist

$$(\nu''+4)^2-\Sigma(\nu''+1-\gamma_i)^2-2-1=1.$$

Diese Annahme kann man auch für $\nu''=2$ machen, was von der ersteren nicht anging, da $\nu''+1=3$ wird und der Büschel selbst entsprechender Curven eben derjenige wird, von dem wir ausgingen, sobald wir den zweiten in der Tabelle angeführten Fall betrachten, für den $\gamma_1=3>\frac{\nu+1}{2}$ ist. Für den ersten Fall werden die Curven $\nu''+1^{\text{ter}}$ Ordnung Curven 3ter Ordnung, welche in 9 einen Doppelpunkt besitzen und durch die Punkte 1—3 nicht hindurch gehen, durch 4—8 einfach gehen.

Ist also ν gerade, so bilden die Curven $\left(\frac{\nu+8}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche in i einen $\left(\frac{\nu}{2}+1-\gamma_i\right)$-fachen Punkt haben, und durch einen festen Punkt b der Ebene gehen ein Netz sich selbst entsprechender Curven derart, dass die Curven, welche durch den Punkt a der Ebene gehen auch durch den Punkt α, welcher a entspricht, laufen. Die Punkte b und β, welche zu den Basispunkten des Netzes gehören, haben keine Fundamentalcurven zu entsprechenden Curven, sondern einer entspricht dem andern, und ist übrigens die Verwandtschaft von der Wahl des Punktes b unabhängig.

Das Geschlecht der Curven $\frac{\nu+5}{2}$ ter Ordnung mit $\left(\frac{\nu+1}{2}-\gamma_i\right)$-fachen Punkten im Falle des ungeraden ν ist

$$\tfrac{1}{2}(\nu'+2)(\nu'+1)-\tfrac{1}{2}\Sigma(\nu'+1-\gamma_i)(\nu'-\gamma_i)=1.$$

Für die Curven $(\nu''+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, für ein gerades ν ergibt sich, wenn ν'' nicht 2 ist und gleichzeitig $\gamma_1=3$, das Geschlecht gleich

$$\tfrac{1}{3}\nu''(\nu''-1)-\tfrac{1}{2}\Sigma(\nu''-\gamma_i)(\nu''-\gamma_i+1)=0$$

und für die Curven $\left(\frac{\nu+8}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung ist das Geschlecht

$$\tfrac{1}{2}(\nu''+3)(\nu''+2)-\tfrac{1}{2}\Sigma(\nu''+1-\gamma_i)(\nu''-\gamma_i)=3.$$

14. Die Curven der eben erwähnten Netze können, offenbar ohne zu zerfallen, einen Doppelpunkt nur auf der Coïncidenzcurve $H^{\nu+5}$ besitzen. Diese bildet also einen Theil der Jacobischen Curve der Netze. Der andere Theil ist:

1. Wenn $\nu=2\nu'+1$ ist, eine Curve der $3(\nu'+2)-(\nu+5)=\nu'^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist a ein Punkt derselben, so wird die Curve $C^{\nu'+3}$, die durch a geht, in a und α je einen Doppelpunkt haben müssen, also ist C^3_a ein Bestandtheil derselben, der andere ist mithin eine Curve $C^{\nu'}$ der ν'^{ten} Ordnung, welche in dem Punkte i einen $(\nu'-\gamma_i)$-fachen Punkt besitzt. Da nun

$$\Sigma(\nu'-\gamma_i)(\nu'-\gamma_i+1)=\nu'(\nu'+3) \text{ und } \Sigma(\nu'-\gamma_i)^2=\nu'^2+1$$

ist. so ist die Curve ν'^{ter} Ordnung durch ihre vielfachen Punkte eindeutig bestimmt und diese ist mithin der andere Theil der Jacobischen Curve des Netzes der Curven $C^{\nu'+3}$. Dieselbe ist vom Geschlecht 1 und bildet mit jeder C^3 eine zerfallende $C^{\nu'+3}$.

2. Wenn $\nu=2\nu''$ ist, eine Curve der $3(\nu''+3)-(\nu+5)=$ $=(\nu''+4)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Curven des Netzes $C^{\nu''+4}$ gehen alle durch die Punkte b, β, diese sind also Doppelpunkte der Jacobischen Curve. Sei nun C^3_b die Curve 3ter Ordnung, welche durch b, also auch durch β geht und a ein Punkt derselben, dann muss offenbar die $C^{\nu''+4}$, welche durch a geht in die C^3_b und eine Curve $C^{\nu''+1}$ der $(\nu''+1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu zerfallen, welche letztere dem Büschel von Curven $(\nu''+1)^{\text{ter}}$ Ordnung angehört, das in diesem Falle auftritt. Ist ferner c ein nicht auf C^3_b liegender Punkt der Jacobischen Curve, so ist C^3_c ein Theil der zerfallenden Curve $C^{\nu''+4}$, der andere Theil muss durch b gehen und ist die Curve $C^{\nu''+1}_b$ des eben erwähnten Büschels, welche durch b geht. Diese bildet nun mit jeder C^3 eine zerfallende $C^{\nu''+4}$ und die Jacobische Curve dieses Netzes zerfällt daher in die C^3_b und die $C^{\nu''+1}_b$, welche beide auch durch β gehen.

Ist $\nu=4$ und $\gamma_1=3$, $\gamma_i=1$ $(i=2, 3. \;\; .9)$, so ist unser Netz ein solches von Curven der 6ten Ordnung, welche in 2, 3. .9 Doppelpunkte haben und durch 1 nicht hindurchgehen, und b, β zu festen einfachen Punkten besitzen. Jeder Büschel dieser Curven enthält nun zerfallende Curven 6ter Ordnung, denn die durch a gehenden C^6 schneiden sich noch in α und die durch 1 gehende Curve dieses Büschels zerfällt offenbar in die C^3_a und in die C^3_b.

II. Erzeugung der Transformationen.

15. Wir haben in I die Ordnung ν der Curve Γ grösser als Null angenommen. Wir können aber den beiden Gleichungen

$$\sum_{1}^{9} {}_i\, \gamma_i = 3\nu - 1 \qquad \sum_{1}^{9} {}_i\, \gamma_i^2 = \nu^2 + 1$$

auch für $\nu = 0$ genügen, wenn wir $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdot \quad \cdot = \gamma_8 = 0$, $\gamma_9 = -1$ setzen und dann 9 als den Punkt betrachten, der Γ ersetzt. Die Beziehung zwischen den Punkten a, α ist dann folgende: Man legt durch a die Curve C_a^3 des Büschels durch 1—9, und verbindet a mit 9, der dritte Schnittpunkt von $\overline{a9}$ mit C_a^3 ist der Punkt α. Man erkennt nun leicht, dass dem Punkte $i = 1, 2 \ldots 8$ die Gerade $\overline{9i}$ als Fundamentalcurve Δ_i^1 entspricht, und dass dem Punkte 9 eine Curve 4ter Ordnung Δ_9^4 als Fundamentalcurve zugehört, welche in 9 einen dreifachen Punkt hat, und durch die übrigen 8 Punkte einfach hindurchgeht. Die in 2 und 4 abgeleiteten Formeln ergeben also auch für die obige Annahme von $\nu = 0$ richtige Werthe. Die Ordnung der Transformation wird 5.

16. Wir sahen in I, 3, dass jede Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu_i}$ als Curve Γ^ν für eine Transformation angenommen werden kann und man hiedurch Transformationen höherer und niedrigerer Ordnung, als die vorgelegte erhalten kann. Ich will nun zeigen, dass überhaupt jede Γ^{ν} in einer Verwandtschaft niedrigerer Ordnung, als sie ergibt, Fundamentalcurve ist, und dass man also auf die angegebene Art überhaupt alle Curven Γ^ν erhält.

Zu dem Zwecke zeige ich vorerst: Ist die Verwandtschaft festgelegt durch die Grundcurve Γ^ν und entspricht dem Fundamentalpunkte i die Fundamentalcurve $\Gamma^{\nu'}$, so wird in der Verwandtschaft, welche durch die Grundcurve $\Gamma^{\nu'}$ festgelegt ist, dem Punkte i die Curve $\Gamma^{\nu'}$ als Fundamentalcurve entsprechen.

Denn Γ^ν habe in h einen γ_h-fachen und $\Gamma^{\nu'}$ einen γ'_h-fachen Punkt, dann ist nach 3 für die durch Γ^ν festgelegte Verwandtschaft, da $\Gamma^{\nu'}$ die Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu_i}$ ist:

$$\nu' = \nu_i = 2\nu - 3\gamma_i + 1,\ \ \gamma'_i = \gamma_{ii} = \nu - 2\gamma_i + 1,\ \ \gamma'_h = \gamma_{i,h} = \nu - \gamma_i - \gamma_h.$$

Wählt man nun $\Gamma^{\nu'}$ als Grundcurve, so wird dem Punkte i als Fundamentalcurve $\Delta_i^{\nu'_i}$ entsprechen, und zwar wird für diese

$$\nu'_i = 2\nu' - 3\gamma'_i + 1 = \nu \quad \gamma'_{i,i} = \nu' - 2\gamma'_i + 1 = \gamma_i \quad \gamma'_{h,i} = \nu' - \gamma'_i - \gamma'_h = \gamma_h$$

sein, d. h. sie ist mit Γ^{ν} identisch.

Wir werden nun gleich zeigen, dass $2\nu - 3\gamma_1 + 1 < \nu$ sein muss, dass also die Fundamentalcurve $\Delta_1^{\nu_1}$ sicherlich von niedriger Ordnung ist als Γ^{ν}. Es tritt mithin Γ^{ν} als Fundamentalcurve wenigstens in der Verwandtschaft, die durch $\Delta_1^{\nu_1}$ bestimmt ist, und deren Ordnung niedriger ist, schon auf.[1]

17. Um zu zeigen, dass $\nu_1 < \nu$ ist, zeige ich, dass wenn $\nu = 3\mu + \varepsilon$ $(\varepsilon = 0, 1, 2)$ gesetzt wird, sich mit alleiniger Ausnahme dreier Fälle

$$\gamma_1 \geqq \frac{\nu - \varepsilon}{3} + \varepsilon + 1$$

ergibt.

Wäre nämlich $\gamma_1 = \mu + \varepsilon$, so folgt aus

$$\sum_1^9 {}_i\, \gamma_i = 9\mu + 3\varepsilon - 1$$

$$\sum_2^9 {}_i\, \gamma_i = 8\mu + 2\varepsilon - 1$$

und da

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \gamma_3 \geqq \gamma_4 \geqq \gamma_5 \geqq \gamma_6 \geqq \gamma_7 \geqq \gamma_8 \geqq \gamma_9 \geqq 0$$

sein soll, so folgt aus letzterer

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \mu + \varepsilon \quad \text{und} \quad \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = \mu \quad \gamma_9 = \mu - 1$$

[1] Hiemit ist gleichzeitig gezeigt, dass man alle positiven ganzzahligen Lösungen der beiden Gleichungen

$$\sum_1^9 {}_i\, \gamma_i = 3\nu - 1 \qquad \sum_1^9 {}_i\, \gamma_i^2 = \nu^2 + 1$$

erhält, wenn man aus einer (ν, γ_i) bekannten $\nu_i = 2\nu - 3\gamma_i + 1$, $\gamma_{i,i} = \nu - 2\gamma_i + 1$ $\gamma_{i,h} = \nu - \gamma_i - \gamma_h$ $(i = 1, 2 \ldots 9)$ bildet, wodurch $\nu' = \nu_i$, $\gamma'_i = \gamma_{i,i}$, $\gamma'_h = \gamma_{i,h}$ gesetzt, sich eine neue Lösung für ν' ergibt. Man kann hiebei von der Lösung $\nu = 0$ $\gamma_1 = \gamma_2 \ldots = \gamma_8 = 0$ $\gamma_9 = -1$ ausgehen.

daher ist

$$\sum_{1}^{9} \gamma_i^2 = \nu^2 + 1 + 2(\varepsilon^2 - \mu)$$

und es wird nur für

$$\varepsilon = 0 \qquad \mu = 0$$
$$\varepsilon = 1 \qquad \mu = 1$$
$$\varepsilon = 2 \qquad \mu = 4.$$

die Curve Γ^ν nicht zerfallen und rational sein, also für unsere Verwandtschaft Grundcurve sein können.

Für diese drei Fälle ist aber

$$\begin{array}{lllll} \nu = 0 & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = 0 & \gamma_9 = -1 & & \\ \nu = 4 & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2 & \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = 1 & \gamma_9 = 0 & (A) \\ \nu = 14 & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 6 & \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = 4 & \gamma_9 = 3 & \end{array}$$

Da nun für

$$\nu = 0, \qquad \nu_1 = 1$$
$$\nu = 4, \qquad \nu_1 = 3$$
$$\nu = 14, \qquad \nu_1 = 11$$

folgt, so ist mit alleiniger Ausnahme des Falles $\nu = 0$ stets $\nu_1 < \nu$

Wir können noch analog zeigen, dass $\gamma_9 \leqq \frac{\nu - \varepsilon}{3} - \varepsilon - 1$ ist, indem, wenn $\gamma_9 = \mu - \varepsilon$ ist, folgen würde, sobald $\varepsilon > 0$ ist

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \mu + \varepsilon, \; \gamma_6 = \mu + \varepsilon - 1, \; \gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = \mu - \varepsilon$$

woraus

$$\sum_{1}^{9} \gamma_i^2 = \nu^2 + 1 + 2(4\varepsilon^2 - \varepsilon - \mu)$$

sich ergibt, also nur wenn

$$\varepsilon = 1 \qquad \mu = 3$$
$$\varepsilon = 2 \qquad \mu = 14,$$

ist die betreffende Curve Γ^ν rational und zerfällt nicht. In diesen Fällen ergibt sich

$$\begin{array}{lllll} \nu = 10 & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 4, & \gamma_6 = 3, & \gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = 2 & \\ \nu = 44 & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 16, & \gamma_6 = 15, & \gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = 12 & (B) \end{array}$$

also $\gamma_9 = \frac{\nu - \varepsilon}{3} - \varepsilon$. Ist aber $\varepsilon = 0$, so ist $\gamma_9 < \mu - 1$, denn für $\gamma_9 = \mu - 1$ ergibt sich für alle übrigen $\gamma_i = \mu$ und daher

$$\sum_1^9 {}_i\, \gamma_i^2 = \nu^2 + 1 - 2\mu.$$

Eine solche Curve zerfällt stets in μ Curven 3ter Ordnung, besitzt also auch den 9. Punkt zu einem μ-fachen.

18. Wir hätten nun zwei Transformationen T_ν, $T_{\nu'}$ mit denselben neun Fundamentalpunkten gegeben und ihre Grundcurven Γ^ν, $\Gamma^{\nu'}$ hätten in dem Fundamentalpunkte i einen γ_i respective γ'_i-fachen Punkt, wobei wir von den Bedingungen $\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq$ $\gamma'_1 \geqq \gamma'_2 \geqq \ldots$ absehen.

Wenden wir auf den Punkt a die Transformation T_ν an, wodurch wir den Punkt α erhalten, und auf diesen die Transformation T'_ν, so erhalten wir den Punkt a', welcher daher aus a durch die Transformation $S = T_\nu . T_{\nu'}$ erhalten wird, wobei $T_\nu . T_{\nu'}$ bedeuten soll, dass zuerst T_ν und dann $T_{\nu'}$ angewendet wird.

Die Transformation S ist eine eindeutige und hat die Punkte 1—9 zu Fundamentalpunkten. Jede Curve C^3 des Büschels durch 1—9 entspricht sich selbst. Denn liegt a auf der C^3_a, so wird sowohl α als a' auf ihr liegen.

Um die Ordnung s der Transformation zu finden, brauchen wir nur die Curve G^n, welche einer Geraden g vermöge T_ν entspricht, durch $T_{\nu'}$ zu transformiren und erhalten, da G^n von der Ordnung $3\nu + 5$ ist und in i je einen $(2\nu - 3\gamma_i + 1)$-fachen Punkt besitzt.

$$s = (3\nu+5)(3\nu'+5) - \sum_1^9 {}_i\, (2\nu - 3\gamma_i + 1)(2\nu' - 3\gamma'_i + 1)$$

$$= 9\left(\nu\nu' - \sum_1^9 {}_i\, \gamma_i \gamma'_i\right) + 10$$

Setzen wir daher

$$\nu\nu' - \sum_1^9 {}_i\, \gamma_i \gamma_{i'} = \delta_{\nu\nu'} \qquad 1)$$

so wird

$$s = 9\,\delta_{\nu,\nu'} + 10. \qquad 2)$$

Es möge nun der Punkt i einer Fundamentalcurve $D_i^{s_i}$ von der Ordnung s_i entsprechen, so müssen alle ihre Punkte durch S in den Punkt i gebracht werden, oder $D_i^{s_i}$ entsteht aus i durch die inverse Transformation $S^{-1} = T_{\nu'} . T_{\nu}$. Vermittelst $T_{\nu'}$ wird aus i eine Curve $\Delta_i^{\nu'_i}$ erhalten, deren Ordnung $\nu'_i = 2\nu' - 3\gamma'_i + 1$ ist und die in i einen $\gamma'_{i,i} = \nu' - 2\gamma'_i + 1$-fachen Punkt, in h einen $\gamma'_{i,h} = \nu' - \gamma'_i - \gamma'_h$-fachen Punkt hat. Dieser $\Delta_i^{\nu'_i}$ entspricht daher vermöge T_{ν} eine Curve der Ordnung

$$s_i = \nu'_i(3\nu+5) - (2\nu - 3\gamma_i + 1)\,\gamma'_{i,i} - \sum_1^9{}'_h (2\nu - 3\gamma_h + 1)\,\gamma'_{i,h}$$

$$= (\nu' - 2\gamma'_i + 1)(3\nu+5) - (2\nu - 3\gamma_i + 1) -$$

$$- \sum_1^9 (2\nu - 3\gamma_h + 1)(\nu' - \gamma'_i - \gamma'_h)$$

$$= 3\left(\nu\nu' - \sum_9^1{}_i \gamma_i\gamma'_i\right) + \nu' - \nu \mp 3 - 3\gamma'_i + 3\gamma_i,$$

wobei $\sum_9^1{}'_h$ bedeutet, dass $h \neq i$ gesetzt werden soll.

Es ist mithin

$$s_i = 3\,(\delta_{\nu\nu'} + \gamma_i - \gamma'_i + 1) + \nu' - \nu. \qquad (3)$$

Dahingegen entspricht dem Punkte i vermöge $S = T_{\nu} . T'_{\nu}$ eine Fundamentalcurve $\mathfrak{D}_i^{s'_i}$ von der Ordnung

$$s'_i = 3\,(\delta_{\nu\nu'} + \gamma'_i - \gamma_i + 1) + \nu - \nu' \qquad 4)$$

und mithin wird einer Curve C^m von der Ordnung m als trans formirte durch S eine Curve entsprechen, deren Ordnung

$$M = ms - \sum_1^9{}_i s'_i \varkappa_i$$

ist, wenn C^m in i einen $\varkappa_i$-fachen Punkt hat.

Bezeichnen wir mit $\sigma_i^{(\varkappa)}$ die Vielfachheit des Punktes $\varkappa$ für die Fundamentalcurve $D_i^{s_i}$, so ist $\sigma_i^{(\varkappa)}$ gleich der Anzahl der

Schnittpunkte der Curve $\Delta_{\varkappa}^{\nu\varkappa}$ mit $\Delta_{i}^{\nu' i}$, welche ausserhalb der Fundamentalpunkte liegen.

Ist also $i \mp \varkappa$, so ist:

$$\sigma_i^{(\varkappa)} = \nu_\varkappa \nu_i' - \gamma_{\varkappa\varkappa}\gamma_{i,\varkappa}' - \nu_{ii}'\gamma_{i,\varkappa} - \sum_1^9{}_h'' \gamma_{\varkappa,h,}\gamma_{i,h}'$$

wobei $\Sigma h''$ bedeuten soll, dass h nicht die Werthe $\varkappa$ und i annehmen soll. Es ergibt sich mithin

$$\sigma_i^{(\varkappa)} = (2\nu - 3\gamma_\varkappa + 1)(2\nu' - 3\gamma_i' + 1) - (\nu' - \gamma_i' - \gamma_\varkappa' + \nu - \gamma_i - \gamma_\varkappa) -$$
$$- \sum_1^9{}_h (\nu - \gamma_\varkappa - \gamma_h)(\nu' - \gamma_i' - \gamma_h')$$
$$= \nu\nu' - \sum_1^9{}_h \gamma_h\gamma_h' + 1 + (\gamma_i - \gamma_i') + (\gamma_\varkappa' - \gamma_\varkappa)$$

also

$$\sigma_i^{(\varkappa)} = \delta_{\nu\nu'} + 1 + (\gamma_i - \gamma_i') + (\gamma_\varkappa' - \gamma_\varkappa) \tag{5)}$$

Ist aber $i = \varkappa$, so folgt

$$\sigma_i^{(i)} = \nu_i\nu_i' - \gamma_{i,i}\cdot\gamma_{i,i}' - \sum{}_h \gamma_{i,h}\cdot\gamma_{ih}'$$
$$= (2\nu - 3\gamma_i + 1)(2\nu' - 3\gamma_i' + 1) - (\nu - 2\gamma_i + \nu' - 2\gamma_i') -$$
$$- \sum_1^9{}_h (\nu - \gamma_i - \gamma_h)(\nu' - \gamma_i' - \gamma_h')$$
$$= \nu\nu' - \sum_1^9{}_h \gamma_h\gamma_h'$$

oder

$$\sigma_i^{(i)} = \delta_{\nu\nu'} \tag{5 a)}$$

d. h. jede D_i^{si} geht gleich oft durch den ihr entsprechenden Punkt i.

Für die $\mathfrak{D}_i^{s' i}$, welche dem Punkt i entspricht, ergibt sich die Vielfachheit $\sigma_i'^{(\varkappa)}$ des Punktes $\varkappa$ als Anzahl der Schnittpunkte der Curve $\Delta_{\varkappa}^{\nu'\varkappa}$ mit $\Delta_i^{\nu i}$, also ist

$$\sigma_i'^{(\varkappa)} = \delta_{\nu\nu'} + 1 + (\gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa') + (\gamma_i' - \gamma_i) = \sigma_\varkappa^{(i)}$$
$$\sigma_i'^{(i)} = \delta_{\nu\nu'} \tag{6)}$$

19. Die Beziehung der Punkte a, a' auf einer Curve C_a^3 ist bekanntlich derartig, dass entweder kein Punkt a mit seinem entsprechenden a' zusammenfällt, oder dass jeder mit seinen entsprechenden coïncidirt und dass also dann die Curve 3ter Ordnung ein Theil der Coïncidenzcurve wird. Es kann auf C_a^3 der Punkt a' nur mit a zusammenfallen, wenn der Punkt γ in dem C_a^3 die Γ^{ν} trifft, identisch ist mit dem Schnittpunkte γ' von C_a^3 mit $\Gamma^{\nu'}$, d. h. wenn C_a^3 durch den Schnittpunkt von Γ^{ν} mit $\Gamma^{\nu'}$ geht, der ausserhalb der Fundamentalpunkte liegt. Dann ist aber C_a^3 eine Curve, deren Punkte mit ihren entsprechenden coïncidiren. Die Coïncidenzcurve der Transformation S besteht daher aus den $\delta_{\nu,\nu'}$ Curven 3ter Ordnung, welche durch die $\delta_{\nu,\nu'}$ Schnittpunkte von Γ^{ν} mit $\Gamma^{\nu'}$, die ausserhalb der Fundamentalpunkte fallen, (Glg. 1) gehen. Ist $\delta_{\nu,\nu'}=0$, d. h. schneiden sich Γ^{ν} und $\Gamma^{\nu'}$ nicht ausserhalb der Fundamentalpunkte, so existirt keine Coïncidenzcurve, gleichzeitig geht keine $D_i^{s_i}$ respective $\mathfrak{D}_i^{s_i}$ durch i. Ist $\delta_{\nu,\nu'}\neq 0$, so berührt jede $D_i^{s_i}$ respective $\mathfrak{D}_i^{s'_i}$ die $\delta_{\nu,\nu'}$ Curven 3ter Ordnung in i.

Nehmen wir beispielsweise als Γ^{ν} und $\Gamma^{\nu'}$ zwei Fundamentalcurven, welche den Punkten i und $\varkappa$ entsprechen, in der durch die Grundcurve Γ^{μ} mit δ_i-fachen Punkten bestimmten Verwandtschaft also

$$\nu=2\mu-3\delta_i+1 \qquad \gamma_i=\mu-2\delta_i+1 \qquad \gamma_h=\mu-\delta_i-\delta_h$$
$$\nu'=2\mu-3\delta_\varkappa+1 \qquad \gamma'_\varkappa=\mu-2\delta_\varkappa+1 \qquad \gamma'_\varkappa=\mu-\delta_\varkappa-\delta_h$$

so wird $\delta_{\nu,\nu'}=0$, (I, 5) also $s=10$

$$s_h=3 \quad (h\neq i, \varkappa); \quad s_i=6 \quad s_\varkappa=0.$$

Die Curven D_h^3 haben in $\varkappa$ einen Doppelpunkt und gehen durch alle Punkte bis auf die Punkte i und h, wo sie nicht hindurchgehen. D_i^6 hat in $\varkappa$ einen dreifachen Punkt in den übrigen Punkten Doppelpunkte, und geht ebenfalls nicht durch i.

Wir wollen diese Transformation mit $S_{i,\varkappa}$ bezeichnen, und die den Curven $\Delta_i^{\mu,i}=\Gamma^{\nu}$ und $\Delta_\varkappa^{\mu,\varkappa}=\Gamma^{\nu'}$ entsprechenden Transformationen mit $T_i, T_\varkappa$, so ist $T_i.T_\varkappa=S_{i.\varkappa}$, d. h. $T_i=S_{i,\varkappa}T_\varkappa$ oder man kann die involutorische Cremonatransformation, welche der Grundcurve $\Delta_i^{\nu,i}$ entspricht, erhalten, wenn man die bestimmte Transformation 10ter Ordnung $S_{i,\varkappa}$ und hierauf die involutorische Transformation, welche zu einer zweiten Fundamentalcurve $\Delta_\varkappa^{\nu,\varkappa}$ gehört,

anwendet. Ist $\delta_i > \delta_x$ also $\nu < \nu'$, so folgt hieraus, wie man durch $S_{i,x}$ die Ordnung von T_x erniedrigen kann, was später noch deutlicher gezeigt werden soll.

Auf einer Curve 3ter Ordnung des Büschels durch 1—9, liegen, wie wir sahen, vier Punkte der Coïncidenzcurve $J^{\nu+5}$ der Verwandtschaft $T_{\nu'}$, geht nun C^3 durch einen Schnittpunkt von Γ^ν und $\Gamma^{\nu'}$, d. h. entsprechen sich ihre Punkte in der Transformation S selbst, so müssen offenbar ihre Schnittpunkte mit der Coïncidenzcurve der einen Verwandtschaft T_ν auch auf der Coïncidenzcurve der anderen $T_{\nu'}$ liegen. Nun gehen aber alle Coïncidenzcurven, wie wir in I, 8 erkannten, durch die zwölf Punkte, in denen die Curven C^3 des Büschels Doppelpunkte haben, also müssen sich die beiden Coïncidenzcurven $J^{\nu+5}$ und $J^{\nu'+5}$ in $4\delta_{\nu,\nu'}+12$ Punkten ausserhalb der Fundamentalpunkte schneiden. In der That liefert die Gleichung

$$(\nu+5)(\nu'+5)-\sum_1^9 {}_i(\nu-2\gamma_i+1)(\nu'-2\gamma'_i+1)=4\delta_{\nu,\nu'}+12$$

die Bestätigung.

20. Das Entsprechen der Punkte a, a' auf der Curve C^3_a vermöge S ist im Allgemeinen kein involutorisches. Denn schneidet C^3_a die Γ^ν in γ und $\Gamma^{\nu'}$ in γ', so bestimmt $\overline{\gamma a}$ auf C^3_a den Punkt α und $\overline{\gamma'\alpha}$ den Punkt a'. Schneidet nun $\overline{\gamma a'}$ die C^3_a in α' und $\overline{\gamma'\alpha'}$ in a'', so wird a'' dem Punkte a vermöge S^2 entsprechen. Soll nun a'' mit a zusammenfallen, so wird das Viereck $a\alpha a'\alpha'$ der C^3_a eingeschrieben sein und ein Paar Gegenecken desselben γ, γ' liegen auch auf C^3_a, daher bilden nach einem bekannten Satze $a\alpha a'\alpha'$ ein Quadrupel von Punkten mit gemeinsamem Tangentialpunkt und auch γ, γ' haben denselben Tangentialpunkt. Umgekehrt haben γ, γ' auf einer C^3 denselben Tangentialpunkt, so wird a'' stets mit a zusammenfallen, d. h. auf C^3 ist das Entsprechen der Punkte ein involutorisches. Es frägt sich, wie viel solcher Curven C^3 existiren, auf denen die Punkte sich involutorisch entsprechen.

Ist γ der Schnittpunkt von Γ^ν mit einer beliebigen C^3, so liegt der Tangentialpunkt γ_1 desselben für die C^3 auf einer bestimmten rationalen Curve Γ^N der Ordnung N, welche ihre vielfachen Punkte nur in den Fundamentalpunkten hat. Fällt nun einer der

drei anderen Berührungspunkte, der von γ_1 an C^3 gehenden Tangenten auf $\Gamma^{\nu'}$, so ist dieser mit γ zusammen ein solches Punktepaar, welches auf der C^3 ein involutorisches Entsprechen bewirkt. Den Ort J^m der drei Berührungspunkte der von γ_1 an die C^3 gehenden Tangenten erhalten wir nun folgendermassen.

Es ist Γ^N die Curve, welche der Grundcurve Γ^ν vermöge T_ν entspricht, also ist

$$N = \nu(3\nu+5) - \sum_1^9{}_i \gamma_i(2\nu-3\gamma_i+1) = 4(\nu+1)$$

und diese Curve hat in i einen Γ_i-fachen Punkt, wenn Γ_i die Anzahl Schnittpunkte von $\Delta_i^{\gamma_i}$ mit Γ^ν ausserhalb der Fundamentalpunkte gelegen, bedeutet. Also ist

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \nu\nu_i - \gamma_i(\nu-2\gamma_i+1) - \sum{}'_h \gamma_h(\nu-\gamma_i-\gamma_h)\\ &= \nu(2\nu-3\gamma_i+1) - \gamma_i - \sum_1^9{}_h \gamma_h(\nu-\gamma_i-\gamma_h)\\ &= 2(\nu-\gamma_i)+1.\end{aligned}$$

Es ergibt sich nun auch, wie es sein muss

$$\begin{aligned}\Sigma\Gamma_i &= 3N-1\\ \Sigma\Gamma_i^2 &= N^2+1.\end{aligned}$$

Nehmen wir nun Γ^N als Grundcurve zur Bestimmung einer neuen Verwandtschaft T_N, so wird die Coïncidenzcurve dieser offenbar Γ^ν als Theil enthalten und der übrige Theil wird eine Curve J^m der $m$ten Ordnung sein, welche die drei Punkte enthält, die mit dem Schnittpunkte von C^3 mit Γ^ν zusammen ein Quadrupel auf C^3 bilden.

Nun ist nach I, 7 die Ordnung der Coïncidenzcurve $N+5 = 4\nu+9$ also ist $m = 3(\nu+3)$. Ferner hat die Coïncidenzcurve in i einen $N-2\Gamma_i+1 = 4\gamma_i+3$-fachen Punkt, also hat J^m in i noch einen $m_i = 3(\gamma_i+1)$-fachen Punkt.

Es schneidet nun J^m die $\Gamma^{\nu'}$ in

$$\begin{aligned}\nu' m - \Sigma m_i \gamma'_i &= 3(\nu+3)\nu' - 3\Sigma p'_i(\gamma_i+1)\\ &= 3\,\delta_{\nu,\nu'} + 3\end{aligned}$$

Punkten. Es gibt daher $3(\delta_{\nu\nu'}+1)$ Curven 3ter Ordnung des Büschels durch 1—9, auf denen das Entsprechen der Punkte vermöge S involutorisch ist. Denn ist γ' einer dieser Schnittpunkte, und γ der Schnittpunkt von $C^3_{\gamma'}$ mit Γ^{ν}, so haben γ, γ' auf $C^3_{\gamma'}$ denselben Tangentialpunkt.

21. Wendet man auf einen Punkt a hintereinander drei Transformationen T_{ν}, $T_{\nu'}$, $T_{\nu''}$ an, so zwar, dass dem a der Punkt α diesem a' und diesem α' entspricht, so ergibt sich, wenn γ, γ', γ'' die drei Schnittpunkte von C^3_a mit Γ^{ν}, $\Gamma^{\nu'}$, $\Gamma^{\nu''}$ sind, α als Schnittpunkt von $\overline{\gamma a}$, a' als Schnittpunkt von $\overline{\gamma'\alpha}$ und α' als Schnittpunkt von $\overline{\gamma'' a'}$ mit C^3_a, und daher ist das Entsprechen der Punkte $a\alpha'$ ein involutorisches, indem für alle Punkte der festen Curve C^3 die Geraden $\overline{a\alpha'}$ durch einen festen Punkt γ''' von C^3 laufen. Das Resultat der drei hintereinander ausgeführten Transformationen T_{ν}, $T_{\nu'}$, $T_{\nu''}$ ist mithin wieder eine involutorische, eindeutige Transformation $T_{\nu'''}$, deren Grundcurve $\Gamma^{\nu'''}$ den Ort der Punkte γ''' für alle Curven des Büschels der C^3 bildet. Es ist $T_{\nu'''} = T_{\nu} . T_{\nu'} . T_{\nu''}$ in früher angegebenem Sinne.

Was zunächst die Ordnung n''' dieser Transformation anbelangt, so ergibt sich dieselbe aus der Ordnung der Curve, welche vermöge $T_{\nu''}$ der G^s entspricht, die zu Folge $S = T_{\nu} . T_{\nu'}$ einer Geraden g correspondirt, und die in i je s_i-fache Punkte hat, d. h. es ist

$$n''' = n'' s - \sum_{1}^{9}{}_i \, s_i \nu''_i$$

also zufolge der Gleichungen 2) und 3)

$$n''' = (3\nu''+5)(9\delta_{\nu\nu'}+10) -$$

$$- \sum_{1}^{9}{}_i (2\nu''-3\gamma''_i+1)(3\delta_{\nu\nu'}+3+\nu'-\nu+3\gamma_i-3\gamma'_i)$$

$$= 9(\delta_{\nu\nu'}+\delta_{\nu'\nu''}-\delta_{\nu\nu''})+3(\nu+\nu''-\nu')+14$$

wobei

$$\delta_{\nu\nu'} = \nu\nu' - \Sigma\gamma_i\gamma'_i \qquad \delta_{\nu'\nu''} = \nu'\nu'' - \Sigma\gamma'_i\gamma''_i \qquad \delta_{\nu\nu''} = \nu\nu'' - \Sigma\gamma_i\gamma''_i$$

ist. Hieraus ergibt sich die Ordnung der Curve $\Gamma^{\nu'''}$

$$\nu''' = \frac{n'''-5}{3} = 3(\delta_{\nu\nu'} + \delta_{\nu'\nu''} - \delta_{\nu\nu''}) + \nu + \nu'' - \nu' + 3 \qquad 7)$$

Um die Curve $\Delta_i^{\nu''' i}$ zu bestimmen, welche dem Punkte i entspricht, bemerken wir, dass sie der Ort ist, welcher dem Punkte i vermöge $T_\nu . T_{\nu'} . T_{\nu''}$ entspricht. Nun entspricht dem Punkte i vermöge $T_\nu . T_{\nu'}$ die Curve $\mathfrak{D}_i^{s' i}$, welche in $\varkappa$ einen $\sigma_i^{(\varkappa)} = \sigma_\varkappa^{(i)}$-fachen Punkt hat. Dieser wird mithin vermöge $T_{\nu''}$ eine Curve entsprechen, deren Ordnung

$$\nu_i''' = n'' s_i' - \sum_1^9{}_\varkappa \sigma_\varkappa^{(i)} \nu_\varkappa''$$

ist. Zufolge 4) und 5) und 6) wird

$$\nu_i''' = (3\nu''+5)(3\delta_{\nu\nu'} + 3 + 3\gamma_i' - 3\gamma_i + \nu - \nu') - \\ - \delta_{\nu\nu'}(2\nu'' - 3\gamma_i'' + 1) - \sum{}'_\varkappa \sigma_\varkappa^{(i)} \nu_\varkappa''$$

$$= (3\nu''+5)(3\delta_{\nu\nu'} + 3 + 3\gamma_i' - 3\gamma_i + \nu - \nu') + (2\nu'' - 3\gamma_i'' + 1) - \\ - \Sigma(2\nu'' - 3\gamma_\varkappa'' + 1)(\delta_{\nu\nu'} + 1 + \gamma_i' - \gamma_i + \gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa')$$

$$\nu_i''' = 3(\delta_{\nu\nu'} + \delta_{\nu'\nu''} - \delta_{\nu\nu''}) + 2(\nu + \nu'' - \nu') - 3(\gamma_i + \gamma_i'' - \gamma_i') + 4 \qquad 8)$$

Da nun $\nu_i''' = 2\nu''' - 3\gamma_i''' + 1$ ist, so ergibt sich

$$\gamma_i''' = (\delta_{\nu\nu'} + \delta_{\nu'\nu''} - \delta_{\nu\nu''}) + (\gamma_i + \gamma_i'' - \gamma_i') + 1 \qquad 9)$$

Aus diesen Werthen in 7), 8), 9) folgt nun auch, wie es sein muss

$$\sum_1^9{}_i \gamma_i''' = 3\nu''' - 1 \qquad \sum_1^9{}_i \gamma_i'''^2 = \nu'''^2 + 1.$$

Aus dem Baue der Grössen ν''', γ_i''' erkennt man ohne weiters, dass die Transformation $T_{\nu'''} = T_\nu . T_{\nu'} . T_{\nu''}$ involutorisch ist, denn es ergeben sich für $T_{\nu''} . T_{\nu'} . T_\nu$ dieselben Werthe, also ist auch $T_{\nu'''} = T_{\nu''} . T_{\nu'} . T_\nu$ und daher

$$T_{\nu'''}^2 = T_\nu . T_{\nu'} . T_{\nu''} . T_{\nu''} . T_{\nu'} . T_\nu = 1$$

wenn mit 1 die Identität bezeichnet wird.

22. Setzen wir nun

für $T_\nu \ldots\ldots \gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \gamma_3 \geqq \gamma_4 \geqq \gamma_5 \geqq \gamma_6 \geqq \gamma_7 \geqq \gamma_8 \geqq \gamma_9 \geqq 0$

fest und nehmen

für $T_{\nu'}$ $\ldots \nu' = 0 \quad \gamma'_1 = \gamma'_2 = \gamma'_3 = \gamma'_4 = \gamma'_5 = \gamma'_6 = \gamma'_7 = \gamma'_8 = 0$
$\gamma'_9 = -1$

$T_{\nu''} \ldots\ldots \nu'' = 0 \quad \gamma''_1 = -1 \quad \gamma''_2 = \gamma''_3 = \gamma''_4 - \gamma''_5 = \gamma''_6 = \gamma''_7$
$= \gamma''_8 = \gamma''_9 = 0$

so wird

$$\nu''' = \nu + 3 - 3(\gamma_1 - \gamma_9).$$

Da nun nach 17 pag. 493

$$\gamma_1 \geqq \frac{\nu - \varepsilon}{8} + \varepsilon + 1 \text{ mit Ausnahme der Fälle } (A) \text{ (pag. 494)}$$

und

$$\gamma_9 \leqq \frac{\nu - \varepsilon}{3} - \varepsilon - 1 \qquad (B) \text{ (pag. 494)}$$

so ist

$$\gamma_1 - \gamma_9 \geqq 2\varepsilon + 2$$

und daher

$$\nu''' \leqq \nu - 3 - 6\varepsilon$$

In den Fällen (A) ist sobald $\nu > 0$ ist, $\gamma_1 - \gamma_9 = 2$, respective 3, also $\nu''' = 1$ respective 8 in den Fällen (B) ist $\gamma_1 - \gamma_9 = 2$, respective 4 und $\nu''' = 7$ respective 35, also ist für alle möglichen $\nu > 0$ stets

$$\nu''' \leqq \nu - 3$$

d. h. also: wendet man auf die Transformation S_ν eine Transformation $\mathfrak{S}_{9,1} = T_0^{(9)}\, T_0^{(1)}$ an, wobei $T_0^{(9)}$ die Transformation für $\nu = 0$ sein soll, welche den Punkt $\gamma = -1$ in 9 hat, so wird der Grad der Transformation wenigstens um neun Einheiten erniedrigt.

Die Transformation $\mathfrak{S}_{9,1}$ hat als Curven $D_i^{s_i}$ folgende:

$$s_1 = 6, \quad s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = s_8 = 3, \quad s_9 = 0,$$

und zwar haben die Curven 3ter Ordnung in 9 je einen Doppelpunkt, gehen durch 1 und den ihnen entsprechenden Punkt nicht.

Die Curve 6ter Ordnung hat in 2—8 Doppelpunkte in 9 einen dreifachen Punkt und geht durch 1 nicht hindurch. Diese $\mathfrak{S}_{9,1}$ ist also identisch mit der früher in 19, als $S_{1,9} = T_1 \cdot T_9$ bezeichneten.

Da nun

$$T_{\nu'''} = T_\nu \,.\, \mathfrak{S}_{9,1}$$

ist und $T_{\nu'''}$ eine um wenigstens neun Einheiten niedrigere Transformation ist, so sieht man, dass, wenn man auf diese wieder eine $\mathfrak{S}_{i,\varkappa}$ passend anwendet, man zu einer noch niedrigeren Verwandtschaft gelangt und so schliesslich zu einer Transformation 5ter, 8ter oder 11ter Ordnung anlangt, denn es ist immer $\nu''' \equiv \nu$ modulo 3. Um dies aber zu bewirken, hat man für $\mathfrak{S}_{i,\varkappa}$ den Punkt i in den niedrigsten und $\varkappa$ in den höchst Vielfachen von $\Gamma^{\nu'''}$ zu legen.

Es ist nach Glg. 9)

$$\gamma_i''' = \gamma_9 - \gamma_1 + \gamma_i + \gamma_i'' - \gamma_i' + 1$$

also

$$\gamma_1''' = \gamma_9, \quad \gamma_h''' = \gamma_9 + 1 - (\gamma_1 - \gamma_h), \quad \gamma_9''' = 2(\gamma_9 + 1) - \gamma_1$$

woraus leicht erkennbar, in welcher Abstufung die Vielfachheit der Punkte vorhanden ist.

Ist $\gamma_1 - \gamma_9 = 2\lambda + \rho$ $(\rho = 0, 1)$ und $\lambda > 3$, so kann man auf $T_{\nu'''}$ nochmals $\mathfrak{S}_{9,1}$ anwenden, denn es ergibt sich dann

$$\nu'''' = \nu''' + 3 - 3(\gamma_1''' - \gamma_9''') = \nu''' + 9 - 3(\gamma_1 - \gamma_9)$$

also

$$\nu'''' = \nu - 2 \,.\, 3(\gamma_1 - \gamma_9 - 2)$$

nach nochmaliger Anwendung von $\mathfrak{S}_{9,1}$ erhält man für die Ordnung der Grundcurve

$$\nu - 3 \,.\, 3(\gamma_1 - \gamma_9 - 3)$$

also nach μ-maliger Anwendung derselben $\mathfrak{S}_{9,1}$ erhält man als Ordnung der Grundcurve

$$\nu - 3\mu(\gamma_1 - \gamma_9 - \mu)$$

und offenbar wird diese Ordnung immer kleiner werden, so lange $\mu < \lambda$ ist. Wir erhalten daher nach λ-maliger Anwendung derselben Transformation $\mathfrak{S}_{9,1}$ auf die Transformation T_ν eine

Transformation $T_{\nu'}$ für die $\nu' = \nu - 3\lambda(\gamma_1 - \gamma_9 - \lambda)$, wobei ν' durch nochmaliges Anwenden derselben $\mathfrak{S}_{9,1}$ nicht mehr erniedrigt wird.

Daher ist

$$T_{\nu'} = T_\nu . \mathfrak{S}_{9,1}^{\lambda}$$

Dasselbe Verfahren können wir nun auf $T_{\nu'}$ anwenden. Es seien α_9 und α_1 der niedrigste und höchst vielfache Punkt von $\Gamma^{\nu'}$, dann wird wenn $\gamma_{\alpha_1} - \gamma_{\alpha_9} = 2\lambda_\alpha + \rho$ analog

$$T_{\nu''} = T_{\nu'} . \mathfrak{S}_{\alpha_9, \alpha_1}^{\lambda\alpha}$$

also

$$T_{\nu''} = T_\nu . \mathfrak{S}_{9,1}^{\lambda} . \mathfrak{S}_{\alpha_9, \alpha_1}^{\lambda_\alpha}$$

Offenbar kann man so fortfahren, bis man auf die Transformationen 5ter, 8ter oder 11ter Ordnung gelangt, für welche die Grundcurve von der 0ten, 1ten, 2ten Ordnung ist. Ist also $\nu \equiv \varepsilon$ (mod. 3) und $\varepsilon = 0, 1, 2$, so wird

$$T_\varepsilon = T_\nu . \mathfrak{S}_{9,1}^{\lambda} . \mathfrak{S}_{\alpha_9, \alpha_1}^{\lambda_\alpha} . \quad . \mathfrak{S}_{\mu_9, \mu_1}^{\lambda\mu}$$

und daher

$$T_\nu = T_\varepsilon . \mathfrak{S}_{\mu_1, \mu_9}^{\lambda\mu} \qquad \mathfrak{S}_{\alpha_1, \alpha_9}^{\lambda_\alpha} . \mathfrak{S}_{1,9}^{\lambda}$$

da $\mathfrak{S}_{\mu_9, \mu_1} . \mathfrak{S}_{\mu_1, \mu_9} = 1$, die Identität gibt.

Man kann daher durch passend angewendete Transformationen S der 10ten Ordnung auf eine Transformation der 5ten, 8ten oder 11ten Ordnung jede Transformation T_ν beliebig hoher Ordnung erzeugen.

Nun kann man aber auch T_2 durch T_0 und T_1 erzeugen. Setzt man nämlich in Formel 7)

$T_0^{(9)} \ldots \nu = 0 \;\; \gamma_1 = 0 \;\; \gamma_2 = 0 \;\; \gamma_3 = 0 \;\; \gamma_4 = 0 \;\; \gamma_5 = 0 \;\; \gamma_6 = 0 \;\; \gamma_7 = 0$
$\gamma_8 = 0 \;\; \gamma_9 = -1$

$T_1^{(8,7)} \;\; \nu' = 1 \;\; \gamma_1 = 1 \;\; \gamma_2 = 0 \;\; \gamma_3 = 0 \;\; \gamma_4 = 0 \;\; \gamma_5 = 0 \;\; \gamma_6 = 0 \;\; \gamma_7 = 1$
$\gamma_8 = 1 \;\; \gamma_9 = 0$

$T_0^{(6)} \;.. \nu'' = 0 \;\; \gamma_1 = 0 \;\; \gamma_2 = 0 \;\; \gamma_3 = 0 \;\; \gamma_4 = 0 \;\; \gamma_5 = 0 \;\; \gamma_6 = -1$
$\gamma_7 = 0 \;\; \gamma_8 = 0 \;\; \gamma_9 = 0$

so wird

$$T_0^{(9)} . T_1^{(8,7)} . T_0^{(6)} = T_2$$

Da sich aus 7) $\nu'''=2$ ergibt und zwar geht der Kegelschnitt durch die Punkte 1 bis 5, da

$$\gamma_1'''=\gamma_2'''=\gamma_3'''=\gamma_4'''=\gamma_5'''=1 \quad \gamma_6'''=\gamma_7'''=\gamma_8'''=\gamma_9'''=0$$

folgt.

Wir können daher als eigentlich erzeugende Operationen unserer Reihe von Transformationen die Transformation 5ter und 8ter Ordnung ansehen. Eine ungerade Anzahl dieser hintereinander ausgeführt, gibt stets eine Transformation unserer Reihe, und man erhält dieselben auf diese Art auch alle.

III. Die sich selbst entsprechenden Curven der Verwandtschaft.

23. Wir haben gesehen, dass in der Verwandtschaft $(3\nu+5)$ter Ordnung, welche durch die Grundcurve $\Gamma^{\nu}_{\gamma_i}$ der νten Ordnung mit γ_i-fachen Punkten in den Fundamentalpunkten, festgelegt ist, einer Curve $C^m_{m_i}$ der $m$ten Ordnung mit m_i-fachen Punkten in den Fundamentalpunkten eine Curve $C^{m'}_{m'_i}$ der m'ten Ordnung mit m'_i-fachen Punkten entspricht, und zwar ist

$$m'=(3\nu+5)m-\sum_1^9{}_i\, m_i(2\nu-3\gamma_i+1)$$

und

$$m'_i=(2\nu-3\gamma_i+1)m-m_i-\sum_1^9{}_\varkappa\, m_\varkappa(\nu-\gamma_i-\gamma_\varkappa)$$

da m'_i die Anzahl Schnittpunkte von C^m_{mi} mit der Fundamentalcurve $\Delta^{\gamma_i}_i$ ist, die ausserhalb der Fundamentalpunkte liegen. Hat C^m_{mi} noch ausserhalb der Fundamentalpunkte in α einen vielfachen Punkt, so hat $C^{m'}_{m'i}$ in α einen genau so vielfachen Punkt.

Wir setzen nun

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^9{}_i\, m_i&=3m-r\\ \Sigma m_i\gamma_i&=\nu m-d\end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Dann ist also r die Anzahl Schnittpunkte einer Curve C^3 des Büschels mit $C^m_{m_i}$ und d die Anzahl Schnittpunkte der $C^m_{m_i}$ mit $\Gamma^{\nu}_{\gamma_i}$

Beide Zahlen d und r sind daher ihrer Natur nach positiv. Die obigen Gleichungen für m' und m'_i nehmen dann die Form an:

$$\left.\begin{aligned} m' &= 2m - 3d + (2\nu+1)r \\ m_i + m'_i &= m - d + r(\nu - \gamma_i) \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Bezeichnen wir mit p das Geschlecht der Curve $C^m_{m_i}$, so wird

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\sum_1^9{}_i\, m_i(m_i - 1)$$

und zufolge 1) ergibt sich

$$2p - 2 + r = m^2 - \sum_1^9{}_i\, m'_2 = m'^2 - \sum_1^9{}_i\, m'^2_i \qquad 3)$$

Die Curve $C^{m'}_{m'_i}$ schneidet eine Curve C^3 des Büschels natürlich auch nur in r Punkten, die den r Schnittpunkten von $C^m_{m_i}$ mit C^3 entsprechen. Hingegen ergibt sich

$$d' = \nu m' - \Sigma m'_i \gamma_i$$

und mit Rücksicht auf 2) und 1)

$$d' = m - 2d + (2\nu + 1) r \qquad 4)$$

oder da

$$m' = 2m - 3d + (2\nu + 1) r$$

ist, folgt

$$m' - d' = m - d. \qquad 5)$$

Die Curve $C^m_{m_i}$ schneidet die ihr entsprechende Curve $C^{m'}_{m'_i}$ auf der Coïncidenzcurve $J^{\nu+5}$ der Verwandtschaft und in einer Anzahl π von Punktepaaren der Verwandtschaft.

Die j Schnittpunkte von $C^m_{m_i}$ mit $J^{\nu+5}$ ergeben sich

$$j = (\nu+5)m - \sum_1^9{}_i\, m_i(\nu - 2\gamma_i + 1) = 2m - 2d + r(\nu+1) \qquad 6)$$

und $C^{m'}_{m'_i}$ kann ausser in diesen die $J^{\nu+5}$ nicht mehr begegnen. Da letztere nun in $j' = 2m' - 2d' + r(\nu+1)$ Punkten schneidet, so folgt $j - j' = 2(m - m' + d' - d) = 0$ nach 5) also $j = j'$ wie es sein muss.

Die 2π übrigen Schnittpunkte von $C^m_{m_i}$ und $C^{m'}_{m'_i}$ geben die π auf $C^m_{m_i}$ liegenden Paare der Verwandtschaft.

Es wird

$$2\pi = mm' - j - \Sigma m_i m'_i$$

folgen, und aus 2), 3) und 6) ergibt sich

$$\pi = \tfrac{1}{2}(r-1)(2m-2d+r\nu) - p - r + 1. \qquad 7)$$

Die Geraden, welche die Punkte a der Curve $C^m_{m_i}$ mit den entsprechenden α von $C^{m'}_{m'_i}$ verbinden, hüllen eine Curve $\mathfrak{C}$ der Classe c ein. Da die Paare a, α, welche auf den Geraden durch einen Punkt k der Ebene liegen, sich auf einer Curve $k^{2\nu+1}$ befinden (I, 6), so ergibt sich die Zahl c als Anzahl Schnittpunkte der $C^m_{m_i}$ mit $k^{2\nu+1}$, so dass also

$$c = m(2\nu+1) - \Sigma m_i(\nu - \gamma_i)$$

wird, oder mit Rücksicht auf 1)

$$c = m - d + \nu r. \qquad 8)$$

24. Soll nun eine Curve $C^m_{m_i}$ mit ihrer entsprechenden zusammenfallen können, so muss r eine gerade Zahl sein, da die Schnittpunkte jeder Curve C^3 des Büschels sich paarweise entsprechen müssen. Setzen wir also $r = 2\rho$, so folgt aus den Gleichungen 2), wenn $m = m'$ und $m_i = m'_i$ ist:

$$\left.\begin{aligned} 3d &= m + 2(2\nu+1)\rho \\ m_i &= d - \rho(\nu+1+\gamma_i), \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

wenn man die zweite durch Benützung der ersten umformt.

Sind nun d, ρ und m irgend welche ganze Zahlen, welche den Gleichungen 9) genügen, so wird, da aus ihnen

$$\sum_1^9 {}_i\, m_i = 2m - 2\rho$$

$$\sum_1 {}_i\, m_i \gamma_i = \nu m - d$$

folgen, welches die Gleichungen 1) sind, der Curve C^m_{mi} eine Curve

$C'^{m}_{m_i}$ entsprechen, die dasselbe m und dieselben m_i besitzt, wie die Gleichungen 2) ergeben, mit Rücksicht auf 9).

Soll nun die Curve $C'^{m}_{m_i}$ mit $C^{m}_{m_i}$ zusammenfallen, so muss sich offenbar die Classe c der Enveloppe $\mathfrak{E}$ auf die Hälfte reduciren, d. h. also wenn $c = 2\varkappa$ gesetzt wird, muss 8) die doppelte Classe der $\mathfrak{E}$ liefern. Mit Rücksicht auf 9) folgt dann

$$\varkappa = d - \rho(\nu+1). \qquad 10)$$

Es folgt nun umgekehrt, wenn für eine Curve $C^{m}_{m_i}$ die Gleichungen 9) und 10) gelten, so entspricht sie sich selbst. Denn zufolge 9) wird die ihr entsprechende Curve dieselbe Ordnung und dieselbe Vielfachheit der Punkte besitzen. Würde sie nun mit der ursprünglichen Curve nicht zusammenfallen, so würde die Classe c der Enveloppe $\mathfrak{E}$ nach 8) sich als $2\varkappa$ ergeben, ist diese also $\varkappa$, so müssen beide Curven zusammenfallen.

25. Es frägt sich nun, durch wie viel Paare der Verwandtschaft muss man eine $C^{m}_{m_i}$ legen, damit sie sich selbst entspricht, wenn m und m_i den Gleichungen 9) allein genügen.

Führt man in 3) die Werthe aus 9) ein, so ergibt sich für das Geschlecht der Curve $C^{m}_{m_i}$

$$2p - 2 + 2\rho = 2\rho(m - d + \nu\rho)$$

oder

$$p + \rho - 1 = \rho(m - d + \nu\rho), \qquad 11)$$

und dieselbe ist bestimmt durch $p + 2\rho - 1$ weitere einfache Punkte.

Die Curve $C^{m}_{m_i}$ enthält dann, wenn sie mit ihrer entsprechenden nicht zusammenfällt nach 7)

$$\pi = (2\rho - 1)(m - d + \nu\rho) - p - 2\rho + 1$$

oder zufolge 11)

$$\pi = (\rho - 1)(m - d + \nu\rho) - \rho \qquad 12)$$

Punktepaare der Verwandtschaft. Die 2π Punkte bilden mit den $j = 2m - 2d + 2\rho(\nu+1)$ Schnittpunkten von $J^{\nu+5}$ mit $C^{m}_{m_i}$ die Basispunkte eines Büschels von Curven $C^{m}_{m_i}$, die nicht in die Fundamentalpunkte fallen, da

$$2\pi + j = m^2 - \sum_{1}^{9} m_i^2$$

ist. Jeder Curve $C^m_{m_i}$ des Büschels durch diese $2\pi+j$ Punkte wird nun eine $C'^m_{m_i}$ desselben Büschels projectivisch entsprechen, und in der Involution entsprechenden Curven dieses Büschels gibt es daher, wenn nicht alle Curven mit ihren entsprechenden zusammenfallen, höchstens zwei sich selbst entsprechende Curven.

Können wir daher Büschel von Curven $C^m_{m_i}$ construiren, in welchen wir drei sich selbst entsprechende Curven nachweisen, so müssen sich alle Curven derselben selbst entsprechen. Solche Büschel kann man aber leicht angeben. Die hiezu dienenden Sätze mögen vorangeschickt werden.

26. *a)* Wenn eine $C^m_{m_i}$, für welche die Gleichungen 9) gelten, durch $\rho-1$ Paare geht, die auf einer Curve C^3_1 des Büschels 3ter Ordnung liegen, so geht sie auch noch stets durch ein weiteres Paar. Es schneide C^3_1 die $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ in dem Punkte γ, dann gehen die Verbindungslinien der $\rho-1$ Paare $(a\ \alpha_\varepsilon)$ $\varepsilon=1, 2\ldots\rho-1$ durch γ. Aus 9) folgt nun

$$m+\rho\nu=3[d-(\nu+1)\rho]+\rho=3\varkappa+\rho$$

d. h. die Curve $C^m_{m_i}$ mit der ρmal gezählten Curve $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ gibt eine Curve derselben Ordnung, wie $\varkappa$ Curven C^3 des Büschels und ρ Gerade zusammengenommen. Beide haben überdies in den Fundamentalpunkten gleich vielfache Punkte, denn $C^m_{m_i}+(\Gamma^\nu_{\gamma_i})^\rho$ hat in i einen $(m_i+\rho\gamma_i)$-fachen Punkt und $\varkappa$ Curven C^3 haben daselbst einen $\varkappa=d-(\nu+1)\rho$-fachen Punkt und zufolge 9) ist $\varkappa=m_i+\rho\gamma_i$. Die ρ Geraden brauchen nicht mehr durch die Fundamentalpunkte zu gehen. Nehmen wir nun als diese ρ Geraden die $\rho-1$ Verbindungsgeraden $(a_\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, welche durch γ gehen, und eine weitere beliebige Gerade durch γ, welche C^3_1 in dem Paare (x, ξ) treffen soll und legen wir die $C^m_{m_i}$ durch die $2(\rho-1)$ Punkte $a_\varepsilon, \alpha_\varepsilon$ und x, so muss diese Curve auch durch ξ gehen. Denn die ρ Geraden bilden mit $\varkappa$ beliebigen Curven C^3 eine Curve der $(m+\rho\nu)$ten Ordnung, welche die C^3_1 in den Fundamentalpunkten in $(a_\varepsilon, \alpha_\varepsilon)(x, \xi)$ und γ schneidet, und zwar fallen in letzteren ρ Schnittpunkte hinein, während in den Fundamentalpunkt i je $\varkappa$ Punkte fallen. Da nun die ρmal gezählte $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ und die $C^m_{m_i}$ ebenfalls die C^3_1 in den Fundamentalpunkten i je $\varkappa$mal in γ aber

ρ mal schneidet und durch $(a_\varepsilon \alpha_\varepsilon)$ und x geht, so muss sie auch durch den letzten Schnittpunkt ξ gehen. Daher folgt: Alle Curven $C^m_{m_i}$, für welche die Gleichungen 9) gelten und die durch $(\rho-1)$ Paare der Verwandtschaft gehen, die auf einer Curve 3ter Ordnung des Büschels liegen, schneiden diese immer noch in einem weitern Punktepaare.

b) Ist λ eine ganze Zahl, so folgt aus

$$\sum_1^9 {}_i (m_i-\lambda) = 3(m-3\lambda)-2\rho$$

$$\sum_1^9 {}'_i (m_i-\lambda)\gamma_i = \nu(m-3\lambda)-(d-\lambda),$$

wenn man mit $2\rho'$ und d' die Anzahl Schnittpunkte einer $C^{m-3\lambda}_{m_i-\lambda}$ mit C^3 respective $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ bezeichnet

$$\rho' = \rho, \quad d' = d-\lambda, \tag{13)}$$

und daher aus 9)

$$3(d-\lambda) = (m-3\lambda)+2(2\nu+1)\rho$$
$$m_i-\lambda = (d-\lambda)-\rho(\nu+1+\gamma_i),$$

d. h. einer $C^{m-3\lambda}_{m_i-\lambda}$ entspricht wieder eine solche Curve. Für das Geschlecht p' folgt dann aus 11)

$$p'+\rho-1 = \rho(m-d+\nu\rho-2\lambda)$$

oder

$$p' = p-2\lambda\rho \tag{14)}$$

und die Anzahl Paare π', die auf dieser Curve liegen, ergibt sich aus 12)

$$\pi' = (\rho-1)(m-d+\nu\rho-2\lambda)-\rho$$

oder

$$\pi' = \pi-2\lambda(\rho-1) \tag{15)}$$

während

$$j' = j-4\lambda$$

wird.

27. Nimmt man nun auf einer festen C^3 des Büschels $(\rho-1)$ Punktepaare $(a_1 \alpha_2)$, $(a_1 \alpha_2) \ldots (a_{\rho-1} \alpha_{\rho-1})$ der Verwandtschaft an und legt durch dieselben eine beliebige $C^m_{m_i}$, für die die Gleichungen

9) gelten, so wird dieselbe, wie wir sahen, noch ein Paar $a_\rho \alpha_\rho$ der Verwandtschaft ausschneiden. Hieraus folgt, dass die der $C^m_{m_i}$ entsprechende Curve $C'^m_{m_i}$ auch durch die ρ Paare auf C^3 geht. Es schneiden sich beide Curven überdies in $\pi-\rho$ Paaren und in j Punkten auf $J^{\nu+5}$.

In dem durch $C^m_{m_i}$ und $C'^m_{m_i}$ gebildeten Büschel tritt nun eine in die C^3 und $C^{m-3}_{m_i-1}$ zerfallende Curve auf, welche sich selbst entsprechen muss, da C^3 sich selbst entspricht. In der That geht $C^{m-3}_{m_i-1}$ durch die $\pi-\rho$ übrigen Paare und durch die $j-4$ Punkte auf $J^{\nu+5}$, in denen $C^{m-3}_{m_i-1}$ diese schneidet. Es muss also die $C'^{m-3}_{m_i-1}$, welche der $C^{m-3}_{m_i-1}$ entspricht, diese in $2(\pi-\rho)+j-4 = 2\pi'+j'+$ $+2(\rho-1)$ Punkten schneiden, also mit ihr identisch sein, da sich die Curven $C^{m-3}_{m_i-1}$ und $C'^{m-3}_{m_i-1}$ nur höchstens in $2\pi'+j'$ Punkte ausserhalb der Fundamentalpunkte schneiden können. (Für $\rho = 1$ vgl. 28.)

Es folgt nun: Sind auf drei beliebigen Curven 3ter Ordnung C^3_1, C^3_2, C^3_3 des Büschels je $(\rho-1)$ Paare der Verwandtschaft angenommen, dann ist jede $C^m_{m_i}$, welche durch diese Paare geht, eine sich selbst entsprechende, sobald für sie die Gleichungen 9) stattfinden.

Es sei $C^m_{m_i}$ irgend eine durch diese drei Systeme von $(\rho-1)$ Paaren gehende Curve und $C'^m_{m_i}$ ihre entsprechende. Fiele diese mit $C^m_{m_i}$ nicht zusammen, so würden in dem aus $C^m_{m_i}$ und $C'^m_{m_i}$ gebildeten Büschel drei Curven auftreten, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen, nämlich die drei, welche in C^3_1, C^3_2, C^3_3 und je eine sich selbst entsprechende $C^{m-3}_{m_i-1}$ zerfallen; es müssten daher alle Curven des Büschels sich selbst entsprechen, also auch die beliebige Curve $C^m_{m_i}$, welche zu Grunde gelegt wurde.

Es sind nun von einer $C^m_{m_i}$ noch $q = p+2\rho-1$ Punkte beliebig was nach 11)

$$q = \rho(m-d+\nu\rho+1) \qquad 16)$$

ergibt. Legt man daher die Curven $C^m_{m_i}$ durch $3(\rho-1)$ Paare, so wird die Mannigfaltigkeit

$$\mathfrak{q} = q-6(\rho-1) = \rho(m-d+\nu\rho-5)+6 \qquad 17)$$

sein, der durch diese Punktepaare gehenden Curven $C^m_{m_i}$, die alle selbst entsprechende Curven sind.

28. Für $\rho = 1$ wird überhaupt jede Curve $C^n_{n_i}$, für welche

$$\left.\begin{aligned} n &= 3d - 2(2\nu+1) \\ n_i &= d - (\nu+1+\gamma_i) \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

und $n_i > 0$ ist, sich selbst entsprechen. Diese Curven sind überdies **hyperelliptisch.** Denn, da auch jede $C^{n-3}_{n_i-1}$ sich selbst in der Verwandtschaft entspricht, so wird, wenn $C^{n-3}_{n_i-1}$ durch den Punkt a von $C^n_{n_i}$ geht, sie auch durch den Punkt α auf $C^n_{n_i}$ gehen, d. h. jede adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der $C^n_{n_i}$, welche durch einen Punkt der Curve geht, geht noch durch einen zweiten mit Annahme des ersten bestimmten Punkt derselben. Hieraus folgt aber deutlich der hyperelliptische Charakter der C^n_{ni}.[1]

Für diese Curven folgt aus 11)

$$p = n - d + \nu \qquad (19)$$

und aus 16)

$$q = p + 1$$

Die $j = 2p+2$ Schnittpunkte der $C^n_{n_i}$ mit der Coïncidenzcurve $J^{\nu+5}$ sind die zusammenfallenden Punkte der hyperelliptischen Beziehung auf $C^n_{n_i}$, in ihnen wird $C^n_{n_i}$ von allen adjungirten $C^{n-3}_{n_i-1}$ berührt, ebenso auch von den Curven 3ter Ordnung, welche durch diese Punkte gehen. Die $j-3 = 2p-1$ Doppelverhältnisse der Curven 3ter Ordnung des Büschels, welche nach diesen Punkten gehen, können als die Moduln der $C^n_{n_i}$ aufgefasst werden, da der Büschel der C^3 projectivisch ist einem beliebigen Büschel der $C^{n-3}_{n_i-1}$, welcher durch $p-2$ Punkte der $C^n_{n_i}$ festgelegt ist, in Anbetracht der ausgeschnittenen Paare $(a\,\alpha)$ auf $C^n_{n_i}$.[2] Da man von der $C^n_{n_i}$ nur $p+1$ Punkte etwa auf $J^{\nu+5}$ annehmen kann, wodurch sie bestimmt wird, so hängen die $j-3 = 2p-1$ Moduln dieser Curven nur von $p+1$ Constanten ab, und da $2p-1 > p+1$ sobald $p > 2$ ist, so sind diese hyperelliptischen Curven, wenn $p > 2$ ist, nicht die allgemeinsten ihres Geschlechtes. Eine Ausnahme tritt für $\nu = 1$ auf, indem auch noch jede C^6, welche in sieben Punkten

---

[1] Cf. Klebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie, pag. 711.
[2] Klebsch-Lindemann, l. c. pag. 717.

Doppelpunkte hat und ein Paar $(a\alpha)$ der Verwandtschaft enthält, sich selbst entspricht und die allgemeinste hyperelliptische Curve vom Geschlechte 3 wird, da man als Γ^{ν} eine beliebige Gerade der Ebene wählen kann, an Stelle der ursprünglich angenommenen Geraden.

Dass jede C^6, welche sieben Doppelpunkte hat und auf der zwei Punkte $(a\alpha)$ liegen, die mit den sieben Punkten die Basis eines Büschels von Curven 3ter Ordnung bilden, hyperelliptisch ist, folgt ohne weiters daraus, dass dieser Büschel 3ter Ordnung von adjungirten Curven die einfach lineare Schaar von zwei Punkten auf C^6 ausschneidet.

29. Die Classe der Enveloppe $\mathfrak{E}$ der Verbindungsgeraden entsprechenden Punkte der $C^n_{n_i}$ ergibt sich aus 10)

$$\varkappa = d-\nu-1 = n-p-1.$$

Die Envelope ist rational, da ihre Tangenten eindeutig den Curven C^3 des Büschels entsprechen, welcher die Punktepaare auf $C^n_{n_i}$ ausschneidet. In der That ergibt sich die Ordnung einfach daraus, dass einem Punkte k von $\mathfrak{E}$ eine Curve $k^{2\nu+1}$ entsprechen muss, welche $C^n_{n_i}$ in einem Punkte a, daher auch in dem entsprechenden α, berühren muss. Nun bilden die $k^{2\nu+1}$ deren Punkte k auf einer Geraden g liegen einen Büschel und jede Curve $k^{2\nu+1}$ schneidet die $C^n_{n_i}$ in $2\varkappa$ Punkten, welche $\varkappa$ Paare bilden. Die diese Paare projicirenden Curven C^3 des Büschels bilden daher eine Involution $\varkappa$ter Ordnung, in der es $2(\varkappa-1)$ Doppelelemente gibt. Die $2(\varkappa-1)$ Curven C^3 schneiden dann $C^n_{n_i}$ je in einem Paare, so dass die $k^{2\nu+1}$, welche durch dasselbe hindurchgeht, die $C^n_{n_i}$ in diesem berührt, also liegen auf g $2(\varkappa-1)$ Punkte k, deren Curven $k^{2\nu+1}$ die $C^n_{n_i}$ doppelt berühren, in a und α, und die also Punkte der Enveloppe sind.

Man findet auch die $\frac{1}{2}(\varkappa-1)(\varkappa-2)$ Doppeltangenten von $\mathfrak{E}$ folgendermassen. Auf den Tangenten von $\mathfrak{E}$ liegen nämlich noch je $(\nu-1)$ Paare der Verwandtschaft, deren Ort nach (I, 12) eine Curve K der $[\varkappa(2\nu+1)-n] = (\nu-1)(2\varkappa+1)$ten Ordnung ist, welche in i einen $\varkappa(\nu-\gamma_i)-n_i = \varkappa(\nu-1)-(\varkappa-1)\gamma_i$-fachen Punkt hat. Diese Curve K schneidet die $C^n_{n_i}$ auf der Curve $H^{5(\nu-1)}$ (I, 9), welche die coïncidirenden Paare der Verwandtschaft enthält und überdies in je Punktgruppen zu vier, welche auf einer Geraden

liegen, die die $\frac{1}{2}(\varkappa-1)(\varkappa-2)$ Doppeltangenten der $\mathfrak{C}$ bilden. Die Rechnung verificirt leicht dies Resultat.

30. Es möge noch gezeigt werden, dass jede Curve $C^n_{n_i}$ der $n$ten Ordnung, welche in den neun Basispunkten eines Büschels von Curven 3ter Ordnung n_i-fache Punkte hat, so zwar, dass

$$\sum_1^9 {}_i\, n_i = 3n-2 \qquad 20)$$

ist, **hyperelliptisch** ist, sobald sie nicht zerfällt.

Ein Zerfallen kann aber nur in zwei rationale Curven der Ordnung n' und n'' stattfinden, so dass $n = n'+n''$ ist, und die Vielfachheit n'_i, n''_i die Fundamentalpunkte $n'_i+n''_i = n_i$ liefert, oder in eine $C^{n-3\lambda}_{n_i-\lambda}$ und λ Curven 3ter Ordnung des Büschels, so dass $C^{n-3\lambda}_{n_i-\lambda}$ wieder eine hyperelliptische Curve wird, die nun auch ihrerseits in zwei rationale Curven zerfallen kann, sobald $n_i-\lambda > 0$ ist.

Wir setzen vor der Hand voraus, dass kein n_i Null ist. Es folgt aus 20), dass die $C^n_{n_i}$ vom Geschlechte

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}\sum_1^9 {}_i\,(n_i-1)n_i = \tfrac{1}{2}\Big[n^2 - \sum_1^9 {}_i\, n_i^2\Big] \qquad 21)$$

wird, und durch

$$\tfrac{1}{2}(n+3)n - \tfrac{1}{2}\Sigma n_i(n_i+1) = p+1 \qquad 22)$$

Punkte bestimmt ist. Wir setzen $p > 2$ voraus, da Curven vom Geschlechte 2 stets hyperelliptisch sind. Dann folgt für eine $C^{n-3\lambda}_{n_i-\lambda}$ für das Geschlecht

$$p' = p - 2\lambda, \qquad 23)$$

und dass sie durch $p'+1 = p-2\lambda+1$ Punkte bestimmt wird.

Da wir n_i für alle i grösser als Null voraussetzen, so werden Curven $C^{n-3}_{n_i-1}$ existiren, welche noch eine $(p-1)$-fache Mannigfaltigkeit bilden. Es schneide nun $C^n_{n_i}$ eine Curve C^3_1 des Büschels 3ter Ordnung in a, α; dann werden alle $C^n_{n_i}$, welche durch a gehen, auch durch α gehen müssen, da nun eine beliebige C^3 mit einer durch a gehenden $C^{n-3}_{n_i-1}$ zusammen, auch eine $C^n_{n_i}$ bildet, so geht

$C^{n-3}_{n_i-1}$ durch α oder jede adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der Curve $C^n_{n_i}$, welche durch einen Punkt a von $C^n_{n_i}$ geht, geht noch durch einen weiteren Punkt α der Curve $C^n_{n_i}$, diese ist also **hyperelliptisch.**

Sei nun $\varkappa$ die Classe der Enveloppe der Geraden, welche die Punktepaare der hyperelliptischen Beziehung verbinden, so ergibt das Correspondenzprincip, dass durch einen beliebigen Punkt $n-p-1$ dieser Geraden gehen, wenn man beachtet, dass auf der $C^n_{n_i}$ vom Geschlechte p stets $2p+2$ Punkte existiren, in denen zwei Punkte der hyperelliptischen Beziehung zusammenfallen. Es ist mithin $\varkappa = n-p-1$.

Die Tangenten der Enveloppe $\mathfrak{E}$ sind nun projectivisch auf die Curven 3ter Ordnung des Büschels bezogen, welcher die Paare ausschneidet, die auf ihnen liegen. Jede Tangente trifft die betreffende C^3 noch in einem Punkte γ, dessen Ort eine rationale Curve Γ^ν ist. Ihre Ordnung ν folgt:

$$\nu = 2n-3p-2 \qquad 24)$$

Da das Erzeugniss des Büschels und der Enveloppe $(3\varkappa+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist und $C^n_{n_i}$ dazu gehört. Hiebei ergibt sich die Vielfachheit γ_i des Punktes i für die Curve Γ^ν

$$\gamma_i = \varkappa - n_i = n-p-n_i-1. \qquad 25)$$

Es folgt nun leicht, dass

$$\Sigma\gamma_i = 3\nu-1 \qquad \Sigma\gamma_i^2 = \nu^2+1 \qquad (26)$$

ist, und dass also $\Gamma^\nu_{\gamma_i}$ zur Festlegung einer Verwandtschaft, wie wir sie betrachtet haben, benutzt werden kann, in der sich dann $C^n_{n_i}$ offenbar selbst entspricht.

Würden nun einzelne n_i Null sein, so kann man statt $C^n_{n_i}$ der Betrachtung eine $C^{n+3\lambda}_{n_i+\lambda}$ zu Grunde legen, wo es offenbar $\lambda = 1$ zu nehmen genügt, um auf die vorgegebene Art den hyperelliptischen Charakter der $C^{n+3\lambda}_{n_i+\lambda}$ zu erweisen, da die $C^n_{n_i}$ durch die n -fachen Punkte nicht bestimmt ist und aus der Annahme

$$\Sigma n_i = 3n-2$$

auch

$$\sum_1^9{}_i (n_i+\lambda) = 3(n+3\lambda)-2$$

folgt. Ist nun $C_{n_i+\lambda}^{n+3\lambda}$ bestimmt, so wird auch $\Gamma_{\gamma_i}^{\nu}$ bestimmt sein, und in dieser Verwandtschaft sind dann offenbar alle Curven, die eine Curve C^3 des Büschels in zwei Punkten schneiden, hyperelliptisch, und entsprechen sich in der Verwandtschaft selbst. Folglich finden die Gleichungen 9) statt

$$n+3\lambda = 3(d+\lambda)-2(2\nu+1)$$
$$n_i+\lambda = d+\lambda-(\nu+1+\gamma_i)$$

aus ihnen folgt

$$n = 3d-2(2\nu+1)$$
$$n_i = d-(\nu+1+\gamma_i)$$

Setzen wir nun $0 \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq n_3 \ldots \leqq n_9$ voraus, so wird nach 25) $\gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \gamma_3 \ldots \geqq \gamma_9$ sein. Ist nun z. B. $n_1 = 0$, so wird

$$n = 3\gamma_1+1-\nu$$
$$n_i = \gamma_1-\gamma_i$$

und daher

$$p = 2\gamma_1-\nu$$

sein.

Nun wurde in (I, 3) gezeigt, dass, einen Fall ausgenommen, (für $\nu = 4$) stets $\gamma_1 \leqq \frac{\nu+1}{2}$ ist, also $p \leqq 1$ sich ergibt, d. h. in diesem Falle ist die Curve $C_{n_i}^{n}$ vom Geschlechte 1, 0 oder sie zerfällt. Für $\nu = 4$ und $\gamma_1 = 3$ ergibt sich $p = 2$ und es sind dies die Curven 6ter Ordnung, welche in den Punkten 2, 3 . . . 9 Doppelpunkte haben, ein Netz bilden, und nach (I, 13) zur Bestimmung der Verwandtschaft benutzt werden können.

Zerfällt die $C_{n_i}^{n}$ nicht, ist also $p = 0$ oder 1, so ergibt 24)

$$\nu = 2(n-2\varepsilon-1)+\varepsilon = 2\nu'+\varepsilon \quad (\varepsilon = 0, 1)$$

und

$$\nu' = n-2\varepsilon-1$$

oder

$$n = \nu'+2\varepsilon+1$$

und

$$n_i = \nu'+\varepsilon-\gamma_i$$

d. h. die Curve $C_{n_i}^{n}$ ist von der Art, wie wir sie in (I, 13) zur Bestimmung der Verwandtschaft durch ein Netz betrachtet haben.

Aus unseren früheren Betrachtungen folgt ohne weiters, dass eine $C^n_{n_i}$ für welche

$$\sum_1 n_i = 3n-2$$

ist, und die neun Punkte i Basispunkte eines Büschels von Curven 3ter Ordnung sind, in einem beliebigen Punkte der Ebene, ohne zu zerfallen, einen Doppelpunkt **nicht** besitzen kann, dass vielmehr der Ort der Doppelpunkte nicht zerfallender Curven eine bestimmte Curve wird, die, wenn ν aus 24) genommen ist, die Ordnung $\nu+5$ hat, und in dem Punkte i einen $(\nu-2\gamma_i+1)$-fachen Punkt besitzt, wobei γ_i der aus 25) sich ergebende Werth ist. Es ist dieser Ort die Coïncidenzcurve der durch $\Gamma^{\nu}_{\gamma_i}$ festgelegten Verwandtschaft.

Der eben erwähnte Fall $n = 6$, $n_i = 3$, $n_9 = 0$ wurde bereits von Herrn Halphen in dem Bulletin de la société mathématique 1882, tom. X, page 163 betrachtet und die Coïncidenzcurve 9ter Ordnung angegeben.
